

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXXVI.

---

**I. Zur objectiven Darstellung der Schallintensität;  
von A. Raps.**(Hierzu Taf. IV u. V.)

---

Die erste Anregung zu vorliegender Arbeit ging von einem Aufsatze aus, welchen Hr. Prof. Kundt: „Ueber ein Maximum- und Minimummanometer für die Druckänderungen in tönenden Luftsäulen,“ veröffentlichte.<sup>1)</sup> Dort beschreibt Kundt ein Verfahren, durch welches ermöglicht wird, das Maximum (resp. Minimum) des in dem Knoten einer Orgelpfeife herrschenden Druckes sichtbar zu machen und der Messung zu unterwerfen. Dies wurde dadurch erreicht, dass zwischen Pfeife und Manometer ein sich einseitig öffnendes Membranventil eingesetzt wurde, welches nur die Verdichtungen (resp. Verdünnungen) der Pfeife auf das Manometer wirken lässt, während es bei der entgegengesetzten Druckphase einen Abschluss bildet.

Hierdurch war in der That die Möglichkeit gegeben, die Intensität von Luftschwingungen, welche durch tönende Körper erzeugt werden, objectiv darzustellen und zu messen. Zu genauen Messungen zeigten sich diese Ventile jedoch noch nicht geeignet. Denn, wie Kundt selbst angibt, lassen sich Ventile von so grosser Beweglichkeit nur sehr schwer luftdicht herstellen; ferner ist immer noch ein Ueberdruck von merklicher Grösse auf einer Seite nothwendig, um das Ventil zu öffnen.

Hierzu kommt noch, dass man keinen Anhalt dafür hat, ob die Membran auch dann wirklich luftdicht abschliesst, wenn in der Pfeife die dem Manometerdrucke entgegengesetzte Druckphase herrscht, und ob sie sich auch gerade in dem Augenblicke luftdicht anlegt, wenn der Druck im

---

1) Kundt, Pogg. Ann. 137. p. 563. 1868.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.

Knoten seinen Maximalwerth (positiv oder negativ) durchlaufen hat. Würde das Abschliessen nicht in diesem Augenblicke erfolgen, so könnte wieder Luft zurückströmen.

Auch Dvořák<sup>1)</sup> hat viele Versuche mit diesen Schallventilen angestellt und gefunden, dass die Angaben verschiedener Manometer sehr ungleich ausfielen. Es lässt sich eben nicht bestimmen, wann ein derartiges Ventil vollkommen functionirt.

Bei den in dieser Untersuchung beschriebenen Versuchen hatte ich es mir zur Aufgabe gestellt, Schallventile herzustellen, bei welchen die oben erwähnten Fehler möglichst vermieden sind. Alsdann würden Instrumente gegeben sein, mit welchen die Schallintensität sich weit genauer bestimmen lässt.

Diese Versuche wurden im königlichen physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt.

Es sei mir an dieser Stelle vergönnt, meinen Lehrern, Hrn. Geheimrath v. Helmholtz, sowie Hrn. Prof. Kundt, für die vielfache Unterstützung durch Rath und That meinen besten Dank auszusprechen.

### § 1. Gang der Untersuchung; Theorie der Schallventile.

Um die eben erwähnten Uebelstände der Schallventile abzustellen, wurden die Membranventile durch solide Metallventile ersetzt, welche sich viel besser dicht herstellen und auf ihre Dichtigkeit prüfen lassen. Diese können aber durch die Luftverdichtungen in der Pfeife nicht mehr bewegt werden. Deshalb mussten sie durch eine äussere periodische Kraft, den Dichtigkeitsvariationen der Pfeife entsprechend, in Bewegung gesetzt werden. Damit war aber auch die Trägheit der Ventile beseitigt und dieselben für die geringsten Druckschwankungen empfindlich gemacht.

Die Bewegung der Ventile wurde anfangs durch einen Electromagnet bewirkt, der von einem intermittirenden Strome durchflossen wurde. (Die genaue Beschreibung dieser Ventile folgt im nächsten Abschnitte.)

Dieser Strom konnte auf verschiedene Weise unterbrochen

1) Dvořák, Pogg. Ann. 150. p. 410. 1873.



werden. Einmal durch die Pfeife selbst, deren Luftschwingungen auf eine gleichgestimmte Membran einwirkten. An dieser Membran war ein Platingäbelchen befestigt, welches, intermittierend in Quecksilber tauchend, eine Schliessung des Stromes und hiermit ein Oeffnen des Ventiles bewirkte, wenn der Luftstrom in der Nähe der Mundöffnung nach aussen gerichtet war. Bei dieser Anordnung war das Ventil zu einer bestimmten Phase offen, und das Manometer zeigte den Druck an, welcher während dieser Phase in der Pfeife herrschte. Eine andere Art der Stromunterbrechung bot jedoch dieser gegenüber viele Vortheile. Dies war eine Oeffnung bei wechselnder Phase. Der Strom wurde nämlich durch eine Helmholtz'sche Unterbrechungsgabel, welche mit der Pfeife sehr nahe zur Uebereinstimmung gebracht war, unterbrochen, und so eine Bewegung des Ventiles bewirkt. Dann zeigt das Manometer natürlich keinen constanten Druck mehr, vielmehr setzt es sich bei jeder Oeffnung mit dem zu dieser Zeit in dem Knoten vorhandenen Drucke ins Gleichgewicht und gibt so in langsamer Folge alle Druckphasen an, welche in der Pfeife schnell wechseln. Ist nämlich die Periode der Ventilöffnung etwas grösser als jene der Pfeifenschwingung, so ist bei jeder folgenden Oeffnung des Ventiles der Druck in der Pfeife schon über die Phase hinausgeilt, welche bei der vorhergehenden Oeffnung herrschte, und das Manometer gibt den Druck dieser späteren Phase an. Das Manometer macht also eine verlangsamte Schwingung in der natürlichen Folge der Pfeifenschwingung durch. Ist umgekehrt die Periode des Ventiles kleiner als die der Pfeife, so bewegt sich das Manometer in umgekehrtem Sinne. Je grösser die Uebereinstimmung dieser beiden Perioden ist, um so langsamer findet die Manometerschwingung statt.

Angenommen, die Pfeife mache in einer Secunde  $p$  Schwingungen, das Ventil öffne sich  $q$  mal, so wird sich letzteres wieder zu der zuerst angezeigten Phase öffnen (d. h. das Manometer wird eine Schwingung vollendet haben), wenn das Ventil um eine ganze Schwingungsdauer der Pfeife vorausgeilt (resp. zurückgeblieben) ist. Bezeichnen wir diese Zeit mit  $\tau$ , so muss die Gleichung:

$$q\tau = p\tau \mp 1 \quad \text{oder} \quad \tau = \mp \frac{1}{q-p} = \pm \frac{1}{(p-q)}$$

erfüllt sein. Diese Zeit ist gleich derselben, in welcher die Pfeife eine Schwebung mit der Gabel macht.

Aus diesen Betrachtungen sieht man, dass zwischen dieser Beobachtungsart und dem sogenannten stroboskopischen Verfahren eine merkwürdige Analogie herrscht.

Wenn auf das Auge sehr rasch veränderliche Lichteindrücke wirken, so ist dasselbe nicht im Stande, diese klar zum Bewusstsein zu bringen. Da nämlich der Eindruck eines bestimmten Lichtbildes noch nicht verschwunden ist, wenn ein neuer zu wirken anfängt, so gehen die einzelnen Eindrücke in einander über und verwischen sich gegenseitig. Lässt man nun durch irgend eine Vorrichtung den Lichtreiz, den ein periodisch sich bewegendes Körper auf das Auge in einer bestimmten Phase ausübt, erst dann durch einen neuen ersetzen, wenn der alte beinahe erloschen ist, so werden wir den Eindruck einer continuirlichen Bewegung gewinnen. Andererseits darf die Zeit, welche von einer bis zur anderen Beleuchtung vergeht, nicht so gross sein, dass der erste Lichteindruck schon ganz verschwunden ist. Dann würde nämlich keine continuirliche, sondern eine sprungweise Bewegung wahrgenommen werden. Das stroboskopische Sehen erfüllt die angegebenen Bedingungen. Die Unfähigkeit des Auges, sehr schnelle Schwingungen klar zum Bewusstsein zu bringen, können wir gleichsam als eine Trägheit auffassen. Diese Trägheit wird durch das stroboskopische Verfahren in gewissem Sinne aufgehoben.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei einem Manometer, welches sehr schnelle Druckschwankungen der Luft anzeigen soll. Die Masse des Manometers besitzt eine so grosse Trägheit, dass sie dem Druckwechsel nicht folgen kann; denn ehe die Manometermasse angefangen hat, sich durch die Verdichtung zu bewegen, ist schon eine Verdünnung da, und so fort. In der That ändert ein Wassermanometer, in den Knoten einer Pfeife eingesetzt, seinen Stand durchaus nicht (wenn wir von einer etwaigen constanten Druckangabe absehen, welche direct durch den Anblasestrom

hervorgerufen wird). Langsamen Druckänderungen folgt jedoch ein Manometer willig.

Durch die Schallventile wird nun die Trägheit des Manometers dadurch aufgehoben, dass man demselben bei jeder Ventilöffnung nur einen so kleinen Ueberdruck (resp. Verdünnung) aus der Pfeife zuführt, dass derselbe sich bis zur nächsten Oeffnung mit dem Manometer ins Gleichgewicht setzen kann.

Die Analogie zwischen dem hier beschriebenen Verfahren und dem stroboskopischen Sehen besteht demnach darin, dass die Verbindung des schwingenden Körpers mit der Vorrichtung, welche die Schwingung darstellen soll (dies ist das Auge, resp. das Manometer), plötzlich abgeschnitten wird. Alsdann wird dem Auge Zeit gegeben, den Lichtreiz verlöschen zu lassen, dem Manometer, sich mit dem Drucke ins Gleichgewicht zu setzen, ehe ein neuer Licht-, resp. Druckimpuls zugeführt wird. (Auch für die Kundt'schen Schallventile findet sich eine Analogie bei dem stroboskopischen Verfahren. Dies ist nämlich die von Mach<sup>1)</sup> eingeführte stroboskopische Selbstregulirung, bei welcher dem tönenden Körper selbst das Geschäft der Beleuchtung in einer gewissen Phase übertragen wird.)

Die Druckunterschiede zwischen Pfeife und Manometer gleichen sich bei jeder Ventilöffnung dadurch aus, dass ein Theil der Luft überströmt. Die immerhin enge Ventilöffnung kann aber in der kurzen Zeit der Oeffnung nur eine sehr kleine Menge Luft durchströmen lassen. Sollen daher die Druckschwankungen im Manometer den Druckänderungen der Pfeife wirklich entsprechen, so muss offenbar der Druckunterschied in der Pfeife zwischen zwei aufeinanderfolgenden Oeffnungen so klein sein, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt werden.

Erstens muss die ganze überschüssige Menge Luft durchströmen können, zweitens muss sich dieser abgeschlossene Ueberdruck (resp. Verdünnung) mit dem Manometer ins Gleichgewicht setzen können. Angenommen, die erstere der beiden Bedingungen wäre nicht erfüllt, so wird blos ein Theil

---

1) Mach, *Optisch-akustische Versuche*. Prag 1873.

der Luft überströmen können. Der im Manometer angegebene Druck wird also kleiner sein, als der wirklich vorhandene. Dies wird namentlich für das Maximum und Minimum des Druckes gelten.

Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, so wird schon ein neuer Druck in das Manometer eintreten, ehe der frühere sich ins Gleichgewicht gesetzt hat. Das Maximum wird in der Pfeife schon eintreten, ehe das Manometer den entsprechenden Werth erreicht hat. Dann wird sich das Ventil wieder bei Phasen geringeren Druckes öffnen, der Ueberdruck wird zurückströmen und so das Manometer den Druck immer zu klein angeben.

Experimentell hat man die Macht, die Druckänderung zwischen zwei aufeinander folgenden Ventilöffnungen beliebig klein zu machen. Bedeutet  $A$  nämlich den Unterschied zwischen dem Druckmaximum und -minimum im Knoten, und nehmen wir der Einfachheit halber an, dieser Druckwechsel gehe mit einer gleichförmigen, mittleren Geschwindigkeit vor sich, so ändert sich der Druck  $d$  zwischen einer Ventilöffnung bis zur nächsten im Mittel um:

$$d = \frac{2A(p - q)}{7},$$

wobei die Buchstaben die frühere Bedeutung haben. Betrachten wir  $q$  als fest gegeben,  $p$  als veränderlich, so hindert nichts, die Differenz  $p - q$  beliebig klein zu machen, indem man die Pfeife mit der Unterbrechungsgabel in immer grössere Uebereinstimmung bringt. Stellt sich nun heraus, dass das Manometer bei einer gewissen Schwingungszeit Maximalwerthe angibt, welche bei einer grösseren Schwingungszeit (genaueres Abstimmen) durch grössere ersetzt werden, so ist dies ein Zeichen, dass  $d$  noch nicht klein genug war. Als dann muss  $p$  dem  $q$  noch so lange genähert werden, bis keine Aenderung in den Maximalangaben des Manometers mehr eintritt.

Dieses Gleichbleiben der Maximalwerthe der Manometerschwingung bei grösser gemachter Uebereinstimmung ist demnach das Kriterium für das richtige Arbeiten der Ventile (wenn man dieselben technisch als vollkommen betrachten würde).

In diesem Punkte unterscheidet sich das hier beschrie-

bene Verfahren allerdings von dem stroboskopischen, da auch bei den raschesten stroboskopischen Schwingungen die Maximalwerthe sich nicht ändern, wenn auch die ganze Schwingung verwaschen ist. Der Unterschied liegt darin, dass beim Auge der Eindruck langsam aufhört, während beim Manometer der Anfang der Erregung träge vor sich geht.

Es fragt sich nun, ob die gestellten Bedingungen für das richtige Arbeiten der Ventile in der Wirklichkeit mit gehöriger Schärfe erfüllt werden können. Dies ist bei einfachen (oder nahe einfachen) Pendelschwingungen der Luft, welche bei schwachem Anblasen der Pfeife auftreten, sicherlich der Fall. Aber auch bei starkem Anblasedruck konnte in den meisten Fällen eine genügende Abstimmung erzielt werden, wie dies aus § 3 hervorgehen wird.

Um bei dem stroboskopischen sowohl wie bei diesem Verfahren ein wahres Bild des Schwingungsvorganges zu erhalten, ist es unerlässliche Bedingung, dass sich die Periode der Pfeife während der Darstellung einer Schwingung nicht ändert. Wenn es auch für die Art der stroboskopischen Schwingung gleichgültig ist, ob diese (innerhalb gewisser Grenzen) schneller oder langsamer vor sich geht, so darf sich doch, um wahre Angaben zu erhalten, die Periode der Pfeife, während der Dauer einer stroboskopischen Schwingung, absolut nicht ändern. Geht eine derartige Schwingung in einer Zeit von drei (bis 32) Secunden vor sich, wie dies bei dieser Untersuchung der Fall war, so darf sich während dieser Zeit die Tonhöhe der Pfeife, also auch der Anblasedruck, gar nicht ändern. Konnte auch der Anblasedruck sehr constant gemacht werden, so sind doch kleine, in unregelmässigen kurzen Zeiten folgende Druckstösse nicht zu umgehen. Da nun die tönende Luftsäule der Pfeife eine sehr geringe elastische Kraft besitzt, so folgen die Tonhöhen den Druckschwankungen fast augenblicklich, und es wird daher sowohl von dem stroboskopischen als dem hier beschriebenen Verfahren kein absolut richtiges Bild der Pfeifenschwingung zu erwarten sein. Mit diesen Schwierigkeiten hat die stroboskopische Untersuchung der Schwingungen von Körpern mit grosser elastischer Kraft in weit geringerem Maasse zu kämpfen, da deren Tonhöhe nicht solch unregel-

mässigen Schwankungen unterworfen ist. Diese Betrachtungen sollen an einer graphischen Darstellung veranschaulicht werden. (Siehe Tafel.)

Es soll in Taf. IV Fig. 1  $AA'$  die Schwingung der Pfeife darstellen (welche der Einfachheit halber als gebrochene Curve dargestellt ist),  $BB'$  die des Ventiles. Die Zeiten sind als Abscissen, die Druckunterschiede der Pfeifen als Ordinaten abgetragen. Jedesmal, wenn die Schwingungscurve des Ventiles die Abscissenaxe  $BB'$  erreicht, soll eine Oeffnung stattfinden. Dann wird die Manometerschwingung durch die Curve 1, 2, 3 . . . 10 dargestellt werden. Diese wird ein getreues Bild einer Einzelschwingung geben, weil während ihres Entstehens die Periode der Pfeife, wie hier gezeichnet, sich absolut nicht geändert hat. Sobald sich aber die Tonhöhe während einer Manometerschwingung ändert, bekommen wir ein Schwingungsbild, wie solches Fig. 2 darbietet. Die Perioden der Pfeife sollen innerhalb der Intervalle  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  unter einander gleich, von Intervall zu Intervall aber verschieden sein. Sobald die Tonhöhe sich ändert, sehen wir die Curve 1, 2, 3 . . . steiler, bezw. gestreckter werden. Natürlich ist diese Entstellung der Schwingungsfigur übertrieben gezeichnet, da sich die Tonhöhe lange nicht in dem Maasse und so plötzlich ändert. Die Zeichnung soll nur andeuten, dass eine Druckschwankung des Anblasestromes, welche die Periode der Pfeife mit derjenigen der Gabel zu grösserer Uebereinstimmung bringt, die Manometercurve gestreckter macht, während dieselbe im umgekehrten Falle steiler wird. Bedenkt man die lange Dauer einer Manometerschwingung und den Umstand, dass schon eine Aenderung des Anblasedruckes um 1 mm (unter gewissen Bedingungen) diese Schwingungsdauer von sieben Secunden auf zwölf Secunden brachte, so sieht man leicht ein, dass die kleinen unregelmässigen Schwankungen des Anblasestromes (sie lagen bei schwachen Tönen unter  $\frac{1}{3}$  mm Wasser) die Schwingungsfigur schon merklich entstellen können.<sup>1)</sup> Am deutlichsten lassen sich derartige durch

1) Wie empfindlich die Methode für jede noch so kleine Schwankung in der Tonhöhe der Pfeife ist, mögen hier einige Beispiele zeigen. Wurde die Thüre des Beobachtunglocales geöffnet und geschlossen, so zeigte

den Anblasestrom hervorgerufenen Schwankungen erkennen, wenn man die Uebereinstimmung zwischen Pfeife und Gabel möglichst weit treibt. Man sieht alsdann das Manometer mit unregelmässigen Schwankungen seine Schwingung durchmachen. Eine derartige sehr langsame Schwingung würde, wie sehr sie auch dem wirklichen Vorgange entspricht, doch nur ein sehr unvollkommenes Bild einer Einzelschwingung der Pfeife geben. (Zum Messen der Maximalwerthe wäre sie allerdings am geeignetsten.) Deshalb ist es vortheilhaft<sup>1)</sup>, die Schwingungen bloß so langsam zu machen, als es die Eigenthümlichkeit der Schallventile eben erheischt.

Ausser der Uebereinstimmung zwischen Pfeifen- und Gabelperiode ist auch die Oeffnungsdauer des Ventiles von grosser Wichtigkeit. Denn je kleiner dieselbe ist im Vergleich zu einer Schwingung der Pfeife, um so mehr Zeit hat die vom Ventil abgeschlossene Luft, sich mit dem Manometer ins Gleichgewicht zu setzen.

Bei dem eingangs erwähnten electromagnetischen Ventile ist die Oeffnungsdauer sehr schwer zu bestimmen und auf die nöthige Kürze herabzudrücken. Dasselbe wurde daher durch ein anderes ersetzt, welches (ohne Vermittelung des electrischen Stromes) direct von einer Unterbrechungsgabel bewegt wird.

Im wesentlichen besteht dasselbe aus zwei luftdicht aneinander vorbeigleitenden Schiebern, von welchen der eine fest ist, der andere durch die Gabel bewegt wird. (Die genaue Beschreibung soll im nächsten Abschnitte folgen.) Jeder dieser Schieber ist mit einem horizontalen Spalte versehen, bei deren Uebereinanderfallen eine Verbindung zwischen dem Knoten der Pfeife und dem Manometer hergestellt ist. Diese Deckung der Spalten kann man an zwei

das Manometer sofort eine unregelmässige Bewegung. In der Nähe der Pfeife war ein König'scher Phonautograph aufgestellt; wurde das Uhrwerk desselben in Bewegung gesetzt, so genügte der durch die Windflügel erzeugte Luftzug, um eine ziemliche Aenderung der Manometerperiode hervorzubringen. Man brauchte sich bloß in die Nähe der Mundöffnung der Pfeife zu stellen, und es wurde im Manometer eine Veränderung des Pfeifentones bemerkt.

1) Wenigstens um das Bild des Schwingungsvorganges zu erhalten.



verschiedenen Stellen bewirken. Einmal kann man die Spalte sich decken lassen, wenn die Gabel das Maximum der Entfernung von ihrer Gleichgewichtslage erreicht hat; dann muss die Pfeife nahe den Ton der Gabel haben. Ferner können die Spalte beim Durchgang der Gabel durch ihre Gleichgewichtslage zur Deckung gebracht werden. Da dieses aber bei jeder Gabelschwingung zweimal geschieht, so muss die Pfeife eine Octave höher sein, als die Gabel. Die letzte Anordnung wurde am meisten angewandt.

Jetzt ist das Mittel gegeben, die Oeffnungsdauer zu bestimmen und zu reguliren. Nennt man nämlich die Spaltbreite  $s$ , die Amplitude der Gabel  $A$ , die Dauer einer Gabelhalbschwingung  $\tau$ , so wird nach der Formel:

$$y = A \sin \frac{2\pi t}{2\tau}$$

die Oeffnungsdauer  $t$  des Ventiles gegeben sein durch die Gleichung:

$$t = \frac{2\tau}{\pi} \arcsin \left( \frac{s}{A} \right)$$

oder bei kleinen Winkeln:

$$t = \frac{2\tau}{\pi} \frac{s}{A}$$

Hierbei ist  $s$  und  $A$  variabel. Die Spaltbreite darf, der Luftreibung wegen, nicht zu klein genommen werden; als passendste wurde eine Breite von  $\frac{3}{4}$  mm gefunden. Da man aber die Gabel Excursionen von 8 bis 10 mm machen lassen kann, so lässt sich die Oeffnungsdauer auf ein Achtel bis ein Zehntel einer Pfeifenperiode bringen.

(Bei der zuerst angeführten Art der Spaltdeckung beträgt die Oeffnungsdauer:

$$t_1 = T \left( \frac{1}{2} - \frac{\arcsin \left( \frac{a-s}{a} \right)}{\pi} \right),$$

wobei  $T$  die Dauer einer ganzen Gabelschwingung bedeutet.)

Zeichnet man die Manometerschwingungen graphisch auf, so erhält man sowohl eine Darstellung der Schwingungsform wie auch der Intensität der Druckschwankungen in der Pfeife. Diese kann wohl mit Recht als eine objective bezeichnet werden.



## § 2. Beschreibung der Apparate.

Da es bei der Ausführung des eben beschriebenen Verfahrens wesentlich auf das richtige Functioniren der angewandten Apparate ankommt, so dürfte eine etwas ausführlichere Beschreibung derselben angebracht sein.

### I. Das electromagnetische Ventil.

(Fig. 3 und 3a.)

In Fig. 3 ist das electromagnetische Ventil in natürlicher Grösse abgebildet, und zwar durchschnitten. Dasselbe besteht wesentlich aus drei Theilen, dem Electromagnet *A*, dem Gehäuse *B* und dem Ventilkörper *C*<sup>1)</sup> mit der Vorrichtung, um den Anker des Ventiles den Polen des Electromagnets zu nähern oder zu entfernen und so die Amplitude des Ventiles zu ändern. Soll dies geschehen, so wird der Apparat mit einem kurzen Rohrstutzen *d*, welcher in das Gehäuse einmündet, an die Pfeife angeschraubt. (Die Zeichnung stellt dieses Rohr *d* punktirt dar, weil dasselbe in Wirklichkeit senkrecht zur Ebene des Papiers steht; ebenso die Schraube *f*.) Ist die richtige Amplitude hergestellt, so kann der Ventilkörper mit der Schraube *f* festgestellt werden, und alle die in der Figur durch  $\times$  bezeichneten Theile können entfernt werden. Dann wird das Gehäuse ohne Vermittelung des Rohrstutzens *d* direct mit dem Gewinde *g'* (welches gleich der Schraube *g* des Stutzens ist) in die Pfeife geschraubt. Hierdurch wird der überflüssige Luftraum vermieden und das Ventil fast in die Knotenfläche gebracht. Ueberhaupt geht die ganze Construction darauf hinaus, eingeschaltete Lufträume möglichst zu vermeiden.

Der Electromagnet *A*, dessen Schenkel aus dünnen Eisendrähten gebildet sind, wird mit seinen beiden Polen<sup>2)</sup> *a'* und *a''* luftdicht durch die obere Decke des Gehäuses *B* geführt. In die beiden Polenenden sind kleine Messingstückchen eingeschraubt, welche eine directe Berührung des Ventilankers mit dem Electromagnet ver-

1) *C* ist in der Nebenfigur 3a im Aufriss dargestellt, das Ventil um 90° gedreht.

2) Der Durchschnitt eines Polendes ist halbkreisförmig.

hindern. In die obere Wand des Gehäuses ist ausserdem noch ein rechtwinklig gebogenes Rohr *e* eingeschraubt, welches die Luft zum Manometer führt. Die obere und untere Metallwand des Gehäuses sind durch einen Glas-hohlcyylinder *h* verbunden, welcher das Spiel des Ventiles zu beobachten gestattet.

In der unteren cylindrischen Bohrung des Gehäuses kann der Ventilkörper *C* mittelst der Schraube *H* und einer entgegenwirkenden Spiralfeder *F* auf und ab bewegt werden. Der luftdichte Verschluss wird durch einen gefetteten Hanf-ring *i* (siehe Nebenfigur 3<sub>a</sub>) bewirkt. In den Ventilkörper *C* ist von unten noch eine kleine Büchse *T* eingeschraubt, welche die Spindel der Schraube *H* trägt. Damit durch den Zwischenraum keine Luft entweichen kann, ist über den unteren Theil des Gehäuses und den dieser Büchse ein Stück Gummischlauch gezogen, welches zwar einen luftdichten Abschluss bildet, die Bewegung des Ventilkörpers jedoch nicht hindert.

In zwei axialen Durchbohrungen des Ventilkörpers bewegt sich mit grosser Leichtigkeit, jedoch fast ohne Spielraum, das Kegelventil mittelst einer stählernen Axe. Dasselbe ist aus Rothguss gefertigt und sorgfältig eingeschliffen. An demselben ist ein kleiner Anker befestigt, welcher, damit er seinen Magnetismus rasch verliere, nach Art der Anker der Morsetelegraphen aus einem der Länge nach aufgeschlitzten Eisenrohre besteht. Dieser Anker wird bei Stromschluss von dem Electromagnete angezogen, und das Ventil so geöffnet. Nachdem der Strom wieder geöffnet ist, zieht eine stählerne Spiralfeder *S*, deren Spannung durch die Schraube *s* regulirt werden kann, das Ventil zu. Damit das Ventil sich nicht um seine Axe drehen, und so seine Oeffnungszeit variiren kann, muss sich dasselbe zwischen zwei Stiften *II'* bewegen, welche von dem Magnet herabreichen. (Fig. 3<sub>a</sub>).

Der intermittirende Strom, welcher das Ventil in Bewegung setzt, wird, wie schon erwähnt, von einer Helmholtz'schen Unterbrechungsgabel geliefert. Jedoch kann man den Electromagnet des Ventiles nicht in den Hauptstrom einschalten, welcher die Gabel treibt. Denn da die Oeffnungsdauer des Ventiles von der Zeit abhängt, während

welcher der Platinstift des Unterbrechers in das Quecksilber eintaucht, so muss die Zeit dieses Contactes so gewählt werden können, wie sie einer richtigen Oeffnungsdauer des Ventiles zukommt. Diese Zeit fällt aber nicht zusammen mit der günstigsten für die Bewegung der Gabel. Es ist deshalb ausser dem Contact der Helmholtz'schen Gabel noch ein zweiter angebracht, welcher, von dem ersten isolirt, den Ventilstrom unterbricht.<sup>1)</sup>

Diese Ventile entsprechen noch keineswegs den Anforderungen, welche an dieselben gestellt werden müssen. Denn einerseits kann das Ventil nur durch einen solchen Strom in Vibration gesetzt werden, dessen Dauer nicht klein genug ist im Verhältniss zu einer Schwingung der Pfeife; andererseits ist es sehr schwer, die Oeffnungsdauer des Ventils zu bestimmen und festzustellen, ob dasselbe während eines Theiles der Gabelperiode auch wirklich abschliesst.

Die Intensitätsbestimmungen wurden daher mittelst eines anderen ausgeführt, welches ihm gegenüber grosse Vortheile besitzt. Das electromagnetische Ventil ist auch nur deshalb erwähnt, weil es gute Dienste bei der Untersuchung von Phasendifferenzen in tönenden Luftsäulen leistet. Diese Untersuchungen sollen im letzten Abschnitte beschrieben werden.

## II. Stimmgabelventile.

(Fig. 4a, 4b, 4c theilweise durchschnitten.)

Bei den Stimmgabelventilen wird die Oeffnung ohne Vermittlung des electrischen Stromes direct durch eine Unterbrechungsgabel bewirkt.

An der oberen Zinke einer Stimmgabel, (Fig. 4c) ist ein ebener Schieber *s* angebracht, in welchem ein horizontaler Spalt von  $\frac{3}{4}$  mm Breite und 4 mm Länge eingefraist ist. Dieser Spalt ist mit einem seitlich einmündenden Rohre in Verbindung, welches der Gabelzinke entlang bis zu dem Punkt läuft, wo die Bewegung der Gabel aufhört; dort ist es rechtwinklig umgebogen und führt zum Manometer. Nahe

1) Die verschiedenen Wege, auf welchen die Luft je nach der Verbindung der Pfeife mit dem Ventil zu dem Ventilkegel gelangen kann, sind durch ausgezogene, bezw. punktirte Pfeile, in der Figur bezeichnet.

am Schieber ist das Rohr durchschnitten und durch elastischen Schlauch wieder verbunden. Auf diese Weise ist eine luftdichte Verbindung des Spaltes mit dem Manometer, auch während des Tönens der Gabel, hergestellt. Die Ebene dieses Schiebers, welchen wir den beweglichen nennen wollen, muss genau parallel zu der Schwingungsebene der Gabel sein, da derselbe luftdicht an einem anderen, mit dem Knoten der Pfeife in Verbindung stehenden Schieber vorbeigleiten soll. Deshalb ist derselbe zwischen zwei Spitzenschrauben  $\alpha\alpha'$  in der Klaue  $K$  drehbar befestigt; praktisch genügt es, diese Ventilfläche der Seitenebene der beiden Gabelzinken genau parallel zu stellen; alsdann wird der Schieber mittelst der Klemmschrauben  $\beta\beta'$  festgeklemmt.

Würde man nun die bewegliche Ventilfläche unmittelbar auf der festen schleifen lassen, so würde einerseits eine luftdichte Verbindung schwer herzustellen sein, andererseits, eine allzu grosse Reibung die Gabel am Tönen verhindern. Deshalb wird zwischen die beiden Ventilflächen eine capillare Flüssigkeitsschicht gebracht, welche abdichtet und die Reibung bedeutend vermindert. Für diesen Zweck hat sich Petroleum am geeignetsten gezeigt. Fette Oele sind unbrauchbar.

Das Material, aus welchem die Schieber angefertigt sind, ist ebenfalls von grossem Einflusse auf das gute Arbeiten derselben. Bloss glasharte Stahlplatten, welche sorgfältigst eben geschliffen und polirt sind, zeigen eine Reibung, welche klein genug ist. Bei der gewöhnlichen Methode des Härtens bleibt der Stahl meist zu weich für unseren Zweck. Durch Ablöschen der über Rothgluth erhitzten Stahltheile in verdünnter Schwefelsäure wird jedoch bei den meisten Stahlsorten eine genügende Härte erzielt. Damit diese Theile sich glashart herstellen lassen, darf an denselben nichts gelöthet sein; dieselben sind daher entweder aus einem Stück zu fertigen, oder sie müssen durch luftdichte Verschraubungen miteinander verbunden werden, was ihre Herstellung allerdings sehr erschwert.

Man könnte glauben, dass durch die zwischengebrachte Flüssigkeitsschicht die immerhin engen Spalten verstopft

werden könnten. Da jedoch richtig gearbeitete Ventilflächen, nachdem man sie voneinander gezogen hat, schöne Interferenzfarben zeigen, ist die Flüssigkeitsschicht offenbar von derselben Grössenordnung, wie die Wellenlänge des Lichtes. Deshalb kann ein capillares Flüssigkeitshäutchen, welches sich über die Spalten ziehen sollte, doch nur so dünn sein, dass es von dem kleinsten Ueberdruck auf einer Seite durchbrochen wird. Ein Eindringen von Flüssigkeitstropfen in die Spalte wurde niemals bemerkt. Man kann sich übrigens leicht davon überzeugen, ob die Oeffnungen von Flüssigkeit frei sind, indem man, während die Gabel arbeitet, auf einer Seite einen kleinen Ueberdruck erzeugt; ein rasches Sinken des Manometers zeigt das Freisein der Oeffnung an.

Der feste Schieber muss sich begreiflicher Weise sehr genau an den beweglichen anlegen. Zu diesem Zwecke muss derselbe um eine horizontale und eine verticale Axe drehbar sein (Cardanische Suspension). Die horizontale Axe ist durch die beiden harten Spitzenschrauben  $mm'$  (Fig. 4<sub>a, b</sub>) gebildet, welche eine sehr sichere und leicht regulirbare Lagerung bieten. Die verticale Axe ist ein kleiner Stahlcylinder (in der Figur punktirt dargestellt), welcher durch eine Schraube  $n$  festgeklemmt werden kann. Der Ventilträger  $T$  ist nun seinerseits in den Spitzenschrauben  $hh'$  drehbar, so dass die Fläche des festen Schiebers gegen die des beweglichen mittelst der Spiralfeder  $F$  sanft angedrückt werden kann. Die Spannung dieser Spiralfeder kann mittelst der Schraube  $I$  sehr fein regulirt werden. Bei guten Spaltflächen ist die Adhäsion der Flüssigkeitsschicht so stark, dass es eines besonderen Andrückens nicht mehr bedarf. Dann dient diese Feder blos zum Reguliren der Gabelamplitude.

Damit der feste Schieber parallel zu der Fläche des beweglichen verschoben werden kann (die Stelle, wo die Spalten coincidiren, wird auf diese Weise bestimmt), ist das ganze beschriebene System auf einem Mikrometerschlitten  $f$  befestigt, welcher in  $UU'$  seine Führungen hat und mittelst der Mikrometerschraube  $V$  in Verein mit der entgegenwirkenden Feder  $W$  messbar verschoben werden kann. Die Ebene, in welcher diese Verschiebung geschieht, muss natürlich auch parallel der Schwingungsebene der Gabel sein.

Deshalb ist auch hierfür eine Justirvorrichtung am Fusse des Trägers *Z* angebracht.

Schwierigkeiten verursachte die Verbindung des festen Schiebers mit der Pfeife. Eine feste Verbindung (selbst durch Gummischlauch) würde bei der geringsten Bewegung der Pfeife gegen die Gabel ein Abreissen der Ventilflächen hervorrufen. Deshalb ist die Verbindung folgendermassen eingerichtet: Das rechtwinklig gebogene Rohr *L*, welches mit dem Spalte des festen Schiebers communicirt, ragt in ein Glasgefäss *P*; durch dessen Boden geht das Rohr *o* hindurch, welches vom Knoten der Pfeife kommt. Wird nun in das Glasgefäss *P* eine Quecksilberschicht gegossen, welche über den unteren Rand von *L* ragt, so ist eine luftdichte Verbindung hergestellt, welche dennoch Bewegung des festen Schiebers zulässt, ohne die Ventilflächen zum Abreissen zu bringen.

Eine derartige, zwischen Ventil und Pfeife eingeschaltete Flüssigkeitsschicht ändert beim Tönen der Pfeife der Trägheit halber ihren Stand nicht.

Der wesentliche Vorzug dieses Ventiles vor dem electromagnetischen besteht darin (abgesehen von der kürzeren, regulirbaren Oeffnungsdauer), dass man dasselbe, auch während des Arbeitens, auf sein Dichthalten hin prüfen kann. Man braucht blos den Hahn *H* abzuschliessen und Luft in dem Manometer zu comprimiren.<sup>1)</sup> Dann würde dasselbe, falls die beiden Flächen nicht luftdicht aneinander vorbeigleiten, rasch sinken; ändert es seinen Stand jedoch nicht, so hält das Ventil dicht. Bei der Prüfung stellte es sich heraus, dass die Ventile auch schon bei minder sorgfältig gearbeiteten Flächen für alle in Frage kommende Drucke vollständig luftdicht abschliessen. Hiernach ist man zu dem Schlusse berechtigt, dass das Ventil, da man sich ja ziemlich vollkommen ebene Flächen verschaffen kann, einen vollständigen Abschluss zwischen dem Knoten der Pfeife und dem Manometer bildet, wenn die Spalten sich nicht decken.

1) Damit beim Comprimiren nicht etwa durch das Heben des Rohres *L* ein Abreissen der Ventilflächen entstände, ist ein kleines Stahlstäbchen *d* angebracht, welches sich gegen die Schraube *e* anlegt, wenn *L* in die Höhe gedrückt werden sollte.

Um die Verbindung nach dem Probiren des Ventils wieder herzustellen, braucht man bloß den Hahn *H* zu öffnen, ohne sonst irgend etwas zu ändern.

Da, wie schon erwähnt, die Oeffnungsdauer des Ventils von der Amplitude der Gabel abhängt, so wurde natürlicher Weise eine möglichst grosse Amplitude angestrebt. (Die Form der Gabel, welche sich am besten zu dem Versuche eignete, geht aus Fig. 4<sub>e</sub> hervor; die Gabel muss eine ziemlich grosse Masse besitzen.) Deshalb musste der Strom, welcher die Gabel treibt, möglichst ausgenutzt werden. Versuche zeigten, dass die Gabel dann die grössten Amplituden macht, wenn der Stift des Unterbrechers ziemlich tief in das mit Alkohol überdeckte Quecksilber tauchte. Weder durch die Erregung der Gabel durch eine gleichgestimmte (sodass beide einen Phasenunterschied von  $\frac{1}{4}$  Schwingungsdauer zeigen), noch das von Töpler<sup>1)</sup> angewandte Verfahren, an dem Unterbrechungsstifte einen Quecksilberfaden adhären zu lassen und die Dauer des die Bewegung fördernden Stromschlusses so zu verlängern, gaben gleich gute Resultate. Dies hängt offenbar mit den auftretenden Inductionsströmen zusammen.

Mittelst eines Stromes von fünf Bunsenelementen und eines zu diesem Zwecke eigens gebauten, sehr kräftigen Electromagneten wurde trotz der Reibung der Ventillflächen doch eine Amplitude von 4 bis 5 mm erreicht. Solche Amplituden lassen sich allerdings auch nur bei vollkommen gearbeiteten Ventillflächen und sorgsamer Ausbalancirung der Gabelzinken erreichen.

So gut wie diese Ventile auch functioniren, so stellte sich bei ihrem Gebrauche doch ein Uebelstand heraus, welcher namentlich bei starken Tönen hervortrat. Es zeigte sich nämlich, dass eine Veränderung der Länge des Rohres, welches sich zwischen Ventil und Knoten befindet, von Einfluss auf die Angaben des Manometers ist, und zwar erfolgte ein Maximum der Angaben, wenn die Länge jenes Verbindungsrohres der halben Wellenlänge des dritten Partialtones der (gedackten) Pfeife ungefähr gleichkam. Dieser Umstand

1) Töpler u. Boltzmann, Pogg. Ann. 141. p. 335. 1870.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.



muss wohl der Resonanz des Zwischenstückes zugeschrieben werden.

Um daher Werthe zu erhalten, welche dem wirklichen Drucke im Knoten der Pfeife entsprechen, musste dieser schädliche Raum vermieden und das Ventil der Knotenfläche ganz nahe gebracht werden. Dies ist durch die Anordnung erreicht, welche Fig. 5 zeigt. (Dieselbe stellt einen Schnitt durch die Pfeife nahe der Knotenfläche dar.) Die beiden aufeinander gleitenden Ventilflächen sind in der Nebenfigur besonders gezeichnet, und zwar ist in Fig. 5<sub>a</sub> die Fläche des festen, in Fig. 5<sub>b</sub> die des beweglichen Schiebers dargestellt. Der letztere ist zwischen zwei Spitzenschrauben<sup>1)</sup> *aa* in einer Klaue *c* befestigt, welche ihrerseits mit der Stimmgabel so verbunden ist, dass eine Drehung um eine horizontale *d* und eine verticale Axe *bb* erfolgen kann. Jeder dieser Schieber hat einen horizontalen und einen verticalen Spalt. Die verticalen Spalte sind sehr breit und communiciren immer, während die horizontalen schmal sind ( $\frac{3}{4}$  mm) und sich nur dann decken, wenn die Gabel durch ihre Gleichgewichtslage geht. Der Knoten steht direct mit dem horizontalen Spalt 1 des festen Schiebers in Verbindung; von diesem gelangt die Luft bei der Gleichgewichtslage der Gabel durch den Spalt 2, welcher mit 3 in Verbindung steht, nach 4 und dann mittelst des Ansatzes *e* zum Manometer. Die beiden Ventilflächen werden bloß durch die Adhäsion der capillaren Flüssigkeitsschicht aneinander gehalten. Dieselbe wirkt so stark bei richtiger Justirung der Flächen, dass dieselben sich ziemlich schwer voneinander reissen lassen.

Um dieses Ventil auch während des Vibirens auf seine Dichtigkeit zu prüfen, ist folgende Vorrichtung angebracht. In die Wand der Pfeife, gerade der Ventilmündung gegenüber, ist eine Büchse *B* eingelassen, durch welche sich, gut geführt, der Stahlstift *f* verschieben lässt. Dieser Stahlstift trägt an seinem vorderen Ende eine runde Messingscheibe *h*, gegen welche ein weiches Gummiplättchen *i* geschraubt ist.

1) Alle Spitzenschrauben sind mit Gegenmuttern versehen, um dieselben sicher einstellen zu können. Das geringste Schlottern irgend eines beweglichen Theiles würde das Arbeiten des Ventils vollständig hemmen.



Wird dieser Stahlstift nun mittelst der Schraube  $s$  in die Pfeife gedrückt, so legt sich das Gummiplättchen gegen den vorstehenden Rand des Rohres  $g$  an und bildet so einen luftdichten Abschluss. Dann kann das Ventil, gerade so wie oben beschrieben, auf sein Dichthalten geprüft werden. Ist dies geschehen, so wird die Schraube  $s$  zurückgeschraubt, der Bügel  $L$  zurückgeklappt, der Stift  $f$  ganz zurückgezogen und der normale Zustand der Pfeife wieder hergestellt.

Bei dieser Ventilconstruction kann das Manometer fast ohne Zwischenraum mit dem Ventil verbunden werden; kleine Luftvolumina, zwischen Manometer und Ventil eingefügt, haben durchaus keinen Einfluss auf die Manometerangaben.

Da der feste Ventilschieber an der Pfeife selbst befestigt ist, die ihrerseits mit der Stimmgabel keine gemeinsame Basis hat, so muss die Pfeife sehr fest gelagert sein, damit ein Abreißen der Ventilflächen vermieden wird. Deshalb ist dieselbe in ein gusseisernes Gestell  $G$  geschraubt, welches für jede Grösse und Form der Pfeife gebraucht werden kann (Fig. 6<sub>a</sub> und 6<sub>b</sub>). Die eine Klammer  $K$ , welche die Pfeife umfasst, ist festgestellt, während die andere  $I$  mittelst der Schraube  $F$  fein in der Verticalen verschoben werden kann. Auf diese Weise wird der feste Spalt in Bezug auf den beweglichen eingestellt.

Es mag hier erwähnt werden, dass ein derartiges Ventil eine Sirene von sehr constanter Tonhöhe abgibt, wenn es von irgend einer Seite angeblasen wird; auch kann man mannigfaltige Klangfarben damit hervorbringen, wenn man die Grösse und Form der Spalte variirt. So geben weite Spalten angeblasen einen weichen Ton, während bei engen Spalten ein Klang erzeugt wird, der an einen in der Ferne erklingenden, schmetternden Trompetenton erinnert.

### III. Die Manometervorrichtung; das Aufzeichnen der Curven.

Um genaue Messungen über die Druckvariationen tönender Luftsäulen anzustellen, schien ein Wassermanometer nicht geeignet, denn die Trägheit und Reibung einer solchen Wassersäule ist immerhin ziemlich gross. Auch ist es schwer, parallactische Fehler beim Ablesen des schwingenden Mano-

meters zu vermeiden. Deshalb wurden die Messungen mittelst eines anderen ausgeführt, welches man wohl als Membranmanometer bezeichnen könnte.

Dasselbe ist in Taf. V Fig. 7<sub>a</sub> im Durchschnitt, in Fig. 7<sub>b</sub> im Aufriss (um 90° gedreht) dargestellt.

Auf einen Dreiwegehahn *A* kann eine Messingtrommel *B* (von verschiedener Grösse) geschraubt werden. Diese Trommel wird mit einer feinen Gummimembran überspannt, auf welche in der Mitte ein rundes, glashartes Stahlplättchen *a* aufgekittet ist. Auf diesem polirten Stahlplättchen sitzt eine ebenfalls harte Spitze *β* auf, welche an den Hebelarm *f* geschraubt ist. Dieser Hebel *f* hat seine Drehungsaxe in einer Stahlschneide, welche sich in zwei stumpfwinkligen, sorgfältig ausgeschliffenen Stahllagern *c* bewegt. Die Spitzen des schräg abgeschnittenen Stahlprismas liegen mit Spielraum gegen zwei Stahlplättchen *gg'* an, welche eine seitliche Verschiebung der Axe verhindern sollen. An diesem Stahlprisma ist ein leichter Spiegel *h* drehbar befestigt, kann aber mittelst der Schraube *i* in jeder beliebigen Lage (einem bestimmten Scalentheile entsprechend) festgeklemmt werden. Durch ein kleines Gegengewichtchen *e* kann der Hebel ausbalancirt werden. Es ist ferner die Einrichtung getroffen, dass der Hebelarm, an welchem die Bewegung der Membran wirkt, beliebig verändert werden kann. Auf diese Weise ist man im Stande, den Winkel, um welchen sich der Spiegel dreht, passend zu wählen.

Dieser Winkel wird mittelst Fernrohres und Scala abgelesen.

Jenachdem die Art der Membran (verschiedene Gummisorten, Nickelinwellblech u. s. w.) gewählt und der Hebelarm des Lichtzeigers, sowie der des Manometers abgestimmt wird, kann die Empfindlichkeit des Manometers variirt werden; dieselbe lässt eine ausserordentlich hohe Steigerung zu. Da jedoch eine derartige Membran ihre Spannung beständig ändert (Gummimembranen müssen häufig erneuert werden) und auch von einer derartigen Vorrichtung keine Scalenangaben erwartet werden können, welche dem Drucke proportional wachsen, so muss das Membranmanometer vor und nach jeder Beobachtungsreihe ausgewerthet werden.

Zu diesem Zwecke ist der oben erwähnte Dreiweghahn angebracht, welcher folgende Verbindungen gestattet:

- 1) Ventil-Membranmanometer<sup>1)</sup>,
- 2) Ventil-Wassermanometer<sup>1)</sup>,
- 3) Ventil-Wassermanometer-Membranmanometer<sup>1)</sup>,
- 4) Membranmanometer-Wassermanometer.

Bei der Auswerthung wird die Stellung 4 benutzt. In die Rohrleitung zwischen den beiden Manometern ist noch eine Zweigleitung  $k^2$ ) eingefügt, durch welche man die Luft in den Manometern auf einen bestimmten Druck (mit dem Munde) bringen kann. Ist dies geschehen, so wird die Luft durch Schliessen des Hahnes  $F$  abgesperrt. Um das Manometer mit Genauigkeit auf einen bestimmten Druck schnell einstellen zu können, ist in die Zweigleitung  $k$  ein kurzes Stück  $g$  dickwandigen Gummischlauches eingesetzt, welches durch die Schraube  $k$  mehr oder weniger zusammengedrückt werden kann. Indem so das abgeschlossene Luftvolum um kleine Bruchtheile variirt wird, kann der Druck mit Leichtigkeit genau regulirt werden. Das Wassermanometer wurde bei den definitiven Beobachtungsreihen mit dem Kathetometer abgelesen.

Selbstverständlich musste sowohl das Manometer wie auch das Fernrohr isolirt von den tönenden Theilen aufgestellt werden.

Dieselbe Manometervorrichtung wurde auch zur graphischen Aufzeichnung der Schwingungen benutzt. Alsdann wurde an dem Prisma ein langer Hebelarm von dünn gespaltenem Riet angebracht, in welchen vorn eine sehr feine, etwas abgerundete Stahlspitze eingesetzt war. Ein solcher auf der hohen Kante stehender Holzhebel verbindet mit grosser Leichtigkeit eine merkwürdige Stabilität und eignet sich vorzüglich zum Aufschreiben langsam verlaufender Curven. (Eine ähnliche Vorrichtung, welche den Namen einer Marey'schen Kapsel trägt, wird von den Physiologen häufig angewandt.) Die Curven wurden auf eine rotirende berusste Trommel aufgezeichnet, deren Drehung durch einen Villar-

1) Diese Combinationen der Luftwege leisten bei der Beobachtung gute Dienste.

2) Siehe die schematische Zeichnung Fig. 7c.

ceau'schen Windflügelregulator gleichmässig gemacht wurde. Die Fixirung der Curven geschah auf photographischem Wege.

Ein auf die Trommel aufgespannter Streifen lichtempfindlichen Papiers wurde berusst. Alsdann liess man den Stift der Schreibvorrichtung die Curve aufzeichnen, indem er den Russ abkratzte. An diesen Stellen konnte das Licht an das lichtempfindliche Papier gelangen und dasselbe zersetzen. Nachdem nun kurze Zeit belichtet war (in directer Sonne circa fünf Minuten), wurde der Russ abgewaschen und das Bild fixirt. Vorzüglich eignet sich zu diesem Verfahren das Emulsionspapier nach Dr. Stolze, welches, im nassen Zustande auf eine Glasplatte aufgequetscht, nach dem Trocknen eine äusserst hohe Glätte zeigt und daher dem Schreibstift sehr wenig Reibung bietet. Die auf solche Weise fixirten Curven sind weit sauberer und haltbarer, als die auf die gewöhnliche Art erhaltenen. Die beigelegten Curven sind möglichst getreue Reproductionen der Originale.

#### IV. Die Erzeugung und Regulirung des Anblasestromes; das Abstimmen der Pfeife.

Die Genauigkeit des vorliegenden Verfahrens hängt vorzugsweise von der Gleichförmigkeit des Anblasestromes ab, wie dies im ersten Paragraphen auseinandergesetzt wurde. Es wurde deshalb auf die Regulirung desselben die grösste Sorgfalt verwendet. In der That bot diese Regulirung die grössten praktischen Schwierigkeiten der Untersuchung.

Zur Erzeugung des Luftstromes stellte sich ein sogen. Roots blower am geeignetsten heraus; ein gewöhnliches Centrifugalgebläse liefert nicht den nöthigen Druck. Ohne Regulirvorrichtung ist jedoch ein solches Gebläse für diese Versuche absolut unbrauchbar, weil es rasche, ziemlich starke Druckschwankungen gibt. Immerhin sind solche Druckschwankungen aber kleiner als diejenigen, welche ein gewöhnlicher Blasebalg erzeugt.

Diese Stösse lassen sich jedoch fast ganz vernichten durch Einschalten grosser Luftvolumina zwischen Pfeife und Gebläse. Auch ist es sehr vortheilhaft, den Luftstrom mit starker Reibung durch enge Oeffnungen zu pressen.

Von den zwischengeschalteten Lufträumen muss eines

variabel sein, um grössere Druckschwankungen ausgleichen zu können, wie solche von dem unregelmässigen Gang des Motors, welcher das Gebläse treibt, herrühren. Dieses veränderliche Luftvolum wurde durch ein grosses Gasometer gebildet, welches in Fig. 8 abgebildet ist. Die Führung des beweglichen Theiles ist folgendermassen angeordnet. Mit der oberen Wand des inneren Theiles ist ein Eisenrohr *R* fest verbunden. Dasselbe wird oben in drei Rollen geführt, welche um  $120^\circ$  voneinander verschieden, angeschraubt sind. (In der Figur sind nur zwei gezeichnet.) An der Wand des beweglichen Cylinders sind zwei senkrechte, genau parallel zu einander justirte Messingröhren *p* angebracht, welche sich in den beiden Rollen *cc'* bewegen. Alle Rollen laufen zwischen Spitzen und sind genau laufend gedreht. Hierdurch ist die Reibung der sich bewegenden Theile auf ein Minimum beschränkt, weil sie überall in wälzende verwandelt ist. Der Druck im Gasometer wird durch Wasser, welches in den Raum *E* eingegossen werden kann, resp. durch aufgelegte Gewichte regulirt. Der vom Gebläse kommende Luftstrom, welcher schon ein etwa 1 cbm haltendes Gefäss passiert hat und durch enge Oeffnungen hindurchgepresst ist, gelangt durch den Hahn *H* in das Gasometer, aus welchem er durch den Hahn *H'* zur Pfeife geführt wird. Die Stärke des Anblasedruckes wird durch die Stellung des Hahnes *H'* regulirt. Der andere Hahn wurde jedesmal nur so weit geöffnet, dass eben so viel Luft ein- wie ausströmte, und der bewegliche Theil des Gasometers eine constante Höhe beibehielt.

Der so regulirte Luftstrom ist schon sehr constant; bei geringem Anblasedruck, bis etwa 100 mm Wasser, bleiben die Schwankungen innerhalb eines Drittel Millimeters. Diese Schwankungen steigern sich natürlich mit dem Drucke. Bei 200 mm betragen sie ca.  $1\frac{1}{2}$  mm, bei 300 mm etwa 3 mm<sup>1)</sup>.

Die Abstimmung der Pfeife mit der Gabel wurde durch die in Fig. 6<sub>a</sub> und 6<sub>b</sub> gezeichnete Vorrichtung ausgeführt.

1) Bei der Bestimmung der Schwingungszahl der Pfeife wurde durch diesen Luftstrom eine Sirene getrieben. Die Tonhöhe derselben konnte während mehrerer Minuten so constant erhalten werden, dass die Zahl der Schwebungen, welche sie mit der Stimmgabel machte, nur in geringen Grenzen schwankte.

Dieselbe besteht aus einer starken Messingplatte  $P$ , welche an einer Axe  $A$  befestigt ist. Diese Axe bewegt sich in Spitzen zwischen einem Pfeifenhalter  $K$  und dem Ständer  $T$ . Die Platte kann hochgezogen und damit die Pfeife tiefer gestimmt werden, wenn man die Schraube  $F$  löst. Hat man die ungefähre Stellung der Platte  $P$  gefunden, so wird  $F$  angezogen. Durch die Mikrometerschraube  $M$ , gegen welche sich der Hebel  $H$  infolge des Uebergewichtes der schweren Platte anlegt, kann die Platte ganz fein verschoben, und so die Pfeife sehr genau mit der Gabel zur Uebereinstimmung gebracht werden. Die Platte ist auf diese Weise sehr sicher gelagert, sodass sie nicht durch das Tönen der Pfeife zum Erzittern gebracht und dadurch verstellt werden kann; dennoch kann dieselbe leicht durch die Mikrometerschraube verstellt werden. Da durch diese Vorrichtung die Tonhöhe nur innerhalb sehr geringer Grenzen geändert werden kann, die Pfeife dieselbe aber bei verschiedenem Anblasedruck stark ändert, so muss zuerst eine gröbere Abstimmung durch passende, auf die Gabel aufgeschraubte Gewichte ausgeführt werden.

Eine sehr bequeme Art, die Pfeife abzustimmen, bietet auch die Veränderung des Anblasedruckes, von welchem ja die Tonhöhe abhängt. Dieses Mittel ist sogar für starke Töne das beste, weil sich dann die Pfeife durch das oben erwähnte Verfahren nicht gut mehr abstimmen lässt. Deshalb ist zwischen Gasometer und Pfeife ein zweiter Hahn  $I$  (Fig. 9<sub>a</sub>) eingesetzt, dessen Stellung durch den Zeiger  $Z$  auf dem getheilten Kreise  $L$  ablesbar ist. Vor und hinter dem Hahn  $I$  mündet eine kleine Zweigleitung  $II'$ . (Der Hahn  $I$  darf nicht ganz geöffnet sein.) Der durch die Zweigleitung fließende Luftstrom kann mittelst des Schraubenhahns  $A$  (Fig. 9<sub>b</sub>) sehr fein regulirt werden. Dieser Schraubenhahn ist demjenigen nachgebildet, welchen Régnault<sup>1)</sup> bei seinen Untersuchungen über die spezifische Wärme der Gase anwandte. Diese Abstimmvorrichtung hat sich, namentlich bei starken Tönen, sehr gut bewährt.

1) Régnault, Mém. de l'acad. 26. p. 58.

## § 3. Beobachtungen an gedackten Pfeifen.

A. Druckvariation im Knoten einer gedackten Pfeife. — Die untersuchte Pfeife hatte folgende Dimensionen:

Länge der Pfeife . . . . .	360 mm
Querschnitt . . . . .	45, resp. 65 mm
Höhe der Mundöffnung . . . . .	22 mm
Die Schwingungen in der Secunde betragen	184

Die Pfeife, welche absichtlich mit einer besonders hohen Mundöffnung versehen wurde, gab einen kräftigen Grundton. Die Obertöne waren auch bei sehr starkem Anblasen verhältnissmässig schwach. Auch durch den stärksten zur Verfügung stehenden Druck konnte der Grundton nicht zum Ueberspringen in den ersten Oberton gebracht werden.

In folgenden Tabellen ist der grösste ( $D$ ) und kleinste Druck ( $V$ ), welcher im Knoten der untersuchten Pfeife herrschte, bei neun verschiedenen Anblasedrucken ( $A$  in Millimetern Wasser) verzeichnet. Die Zahlen bedeuten Scalentheile, welche das Manometer zeigte. (Als Nullpunkt ist 500 gewählt.) Unter dem arithmetischen Mittel sind die Zahlen angegeben, welche sich bei der Auswerthung des Membranmanometers mit einem kathetometrisch abgelesenen Wassermanometer ergaben. Ausserdem ist die mittlere Zeit einer Manometerschwingung ( $= S$ ) angegeben. Da die Beobachtungsreihen zu verschiedenen Zeiten ausgeführt wurden, ist an der Spannung der Membran und der Länge des Hebelarmes mannichfach geändert worden. Deshalb können die Scalenableungen nicht direct miteinander verglichen werden. Die angegebenen Beobachtungsreihen bilden bloß einen kleinen Theil von denjenigen, welche unter mannichfaltiger Abänderung der Versuchsanordnungen ausgeführt wurden. Alle hatten untereinander dieselbe Uebereinstimmung, welche aus den Beispielen hervorgeht.



## I.

 $A = 44 \text{ mm}$   $S = 9 \text{ Sec.}$ 

Druck	Verdünnung
526,9	473,1
527,0	473,2
527,4	473,1
527,1	473,4
526,8	473,0
527,0	473,1
527,5	473,5
527,4	473,5
526,8	473,3
526,7	473,3
527,1	473,2
<u>40,0 mm    -39,75 mm</u>	

## II.

 $A = 60 \text{ mm}$   $S = 10 \text{ Sec.}$ 

D	V
539,2	460,9
539,3	460,8
539,2	461,0
539,5	461,1
539,4	461,0
539,2	461,0
539,1	461,1
539,5	460,9
539,1	460,8
539,4	461,2
539,3	461,0
<u>57,5 mm    -57,3 mm</u>	

## III.

 $A = 80 \text{ mm}$   $S = 8 \text{ Sec.}$ 

D	V
551,2	448,7
551,3	448,9
551,1	449,1
551,5	449,3
551,4	449,2
551,6	449,2
551,2	449,1
551,8	449,1
551,3	449,2
551,2	448,8
551,4	449,1
<u>78,4 mm    -78,0 mm</u>	

## IV.

 $A = 102 \text{ mm}$   $S = 7 \text{ Sec.}$ 

D	V
564,7	436,0
564,5	436,1
564,3	436,4
564,7	436,3
564,2	436,2
564,8	436,0
564,6	436,5
564,5	436,0
564,5	436,0
564,3	436,1
564,5	436,2
<u>94,8 mm    -94,0 mm</u>	

## V.

 $A = 145 \text{ mm}$   $S = 14 \text{ Sec.}$ 

D	V
582,9	418,3
582,7	418,7
582,5	418,2
582,8	418,8
582,9	418,9
582,7	418,1
582,9	418,6
582,8	418,3
582,5	418,5
582,3	418,5
582,7	418,5
<u>120,1 mm    -118,4 mm</u>	

## VI.

 $A = 174 \text{ mm}$   $S = 9 \text{ Sec.}$ 

D	V
594,1	407,8
593,6	408,2
594,3	407,7
593,7	407,5
594,6	407,7
593,6	408,3
593,7	407,6
593,6	408,4
593,5	407,7
593,6	407,8
593,8	407,9
<u>135,1 mm    -133,4 mm</u>	

## VII.

 $A = 200 \text{ mm}$   $S = 6 \text{ Sec.}$ 

D	V
601,0	401,5
600,4	401,7
600,3	401,9
600,7	401,4
601,3	401,4
601,1	401,6
601,4	401,8
600,7	401,2
600,8	401,3
600,9	401,7
600,9	401,5
<u>145,2 mm    -142,3 mm</u>	

## VIII.

 $A = 240 \text{ mm}$   $S = 9 \text{ Sec.}$ 

D	V
610,5	392,6
609,4	392,8
610,7	392,1
609,8	392,0
609,6	392,2
609,9	392,8
609,4	392,7
609,7	392,6
610,4	392,8
610,7	392,3
610,0	392,5
<u>160,3 mm    -156,2 mm</u>	

## IX.

 $A = 308 \text{ mm}$   $S = 6 \text{ Sec.}$ 

D	V
626,3	377,1
624,1	376,9
624,3	377,2
625,7	378,2
624,8	378,4
626,1	378,1
626,3	378,4
624,8	378,5
625,6	376,8
625,5	377,3
625,4	377,7
<u>182,4 mm    -177,3 mm</u>	

Vergleicht man die Einzelbeobachtungen jeder Reihe miteinander, so findet man bei geringem Anblasedrucke eine gut zu nennende Uebereinstimmung. Diese Uebereinstim-



mung wird jedoch immer schlechter, je stärker die Pfeife angeblasen wird. Hieran mögen die immer grösser werdenden Stösse des Anblasestromes Schuld sein; auch erschwert ein bei starken Tönen auftretendes Erzittern des Spiegels die Ablesung.

Die Minimalwerthe des Druckes wachsen nicht im Verhältnisse wie die zugehörigen Maximalwerthe, was sich aus der Vergleichung der betreffenden Zahlen ergibt. Die Curve in Fig. 10 veranschaulicht, in welcher Weise der Druck im Knoten von der Stärke des Anblasestromes abhängt.

Die Maximaldrucke im Knoten sind als Ordinaten aufgetragen, während die Abscissen den Anblasedruck angeben.<sup>1)</sup>

Aus dem Maximaldruckunterschiede im Knoten der Pfeife lässt sich nun die Amplitude eines Lufttheilchens an irgend einem Punkte im Inneren der Pfeife berechnen, wenn wir als Bewegung eine Pendelschwingung annehmen. Dies ist bei schwachen Tönen vollständig erlaubt.

Bezeichnet  $x$  den Abstand eines Lufttheilchens von der Knotenfläche zur Zeit  $t$ ,  $c$  die Schallgeschwindigkeit (340 m),  $T$  die Periode der Pfeife, so findet man für die Excursionen dieses Lufttheilchens:

$$\zeta = a \sin \frac{2\pi t}{T} \sin \frac{2\pi x}{cT},$$

wobei sich  $a$  aus der Gleichung:

$$1 - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 1 - \frac{2\pi a}{cT} \sin \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi x}{cT}$$

bestimmt.

Es ist nämlich  $1 - \partial \zeta / \partial x$  die Dichte der Luft im Knoten zur Zeit  $t$ , wenn wir die Dichte der ruhenden Luft gleich Eins setzen. Das Maximum und Minimum im Knoten liegen auseinander um:

$$\frac{4\pi a}{cT}.$$

Die vorhergehenden Tabellen geben die Druckunterschiede an.

Wir wollen von diesen Drucken den kleinsten (1) und den grössten (9) zur Berechnung nehmen. In Atmosphärendruck umgerechnet, ergibt sich:

$$A_1 = 0,00771, \quad A_9 = 0,03481.$$

1) Die Kreuze sind die Beobachtungen.

Da die Temperaturänderungen während der Schall-schwingungen die Dichtigkeitsänderungen vergrössern, müssen wir, um aus den Druckänderungen die Dichtigkeitsänderungen zu finden, dieselben durch 1,41 dividiren; man erhält so:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 = 0,00547 \\ \delta_2 = 0,02469 \end{array} \right\} \text{ die Dichte der ruhenden Luft } = 1 \text{ gesetzt.}$$

Hiernach berechnet sich:

$$a_1 = 0,805, \quad a_2 = 3,632.$$

Im Schwingungsbauche der Pfeife wird:

$$\zeta = a \sin 2\pi \frac{360}{1848} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

also die Amplitude:

$$A_1 = 0,757, \quad A_2 = 3,415.$$

Die Gesamtverschiebung =  $2A$ :

$$W_1 = 1,514, \quad W_2 = 6,830.$$

Aus diesen Zahlen berechnen sich die Verschiebungen inmitten der Mundöffnung, des kleineren Querschnittes halber, zu:

$$W_I = 4,578 \text{ mm}, \quad W_{IX} = 20,18 \text{ mm}.$$

#### B. Schwingungsform gedackter Orgelpfeifen. —

Eine sorgfältig construirte Pfeife (vom Orgelbauer Appun in Hanau) wurde auf ihre Schwingungsform hin untersucht.

Die Dimensionen derselben waren folgende:

Länge der Pfeife . . . . .	340 mm
Höhe des quadratischen Querschnittes . . . . .	66 mm
Höhe der Mundöffnung . . . . .	16 mm

Die Schwingungscurven derselben sind bei den Zeichnungen wiedergegeben und den Originalen möglichst genau nachgebildet. Es wurden Schwingungscurven bei drei verschiedenen Anblasedrucken aufgezeichnet. Bei der graphischen Darstellung sind die Manometerausschläge (Ordinaten) nicht ohne weiteres miteinander zu vergleichen; erst durch Auswerthung mit einem Wassermanometer wird dies der Fall. Die Empfindlichkeit der Schreibvorrichtung wurde für jeden Druck abgepasst, um keine zu grossen Ausschläge zu erhalten, bei welchen die Excursionen des Schreibstiftes ihrer Bogenform wegen nicht mehr zu Ordinaten genommen wer-

den können. Auch ist die Umlaufszeit der Trommel bei den verschiedenen Curven verschieden.

I. Schwingungsform bei schwachem Anblasen (60 mm Wasser).

Die Curve ist in Fig. B dargestellt. Die mittlere Dauer einer Schwingung betrug 40 Secunden. Der Unterschied zwischen Maximal- und Minimaldruck im Knoten betrug 87,5 mm. Eine grosse Anzahl dieser Curven wurden auf der Theilmaschine ausgemessen. Hierzu eigneten sich durchaus nicht alle, vielmehr wurde die Messung nur bei denen ausgeführt, die aufgezeichnet wurden, während der Anblasestrom sehr constant blieb. (Das Wassermanometer wurde mikroskopisch beobachtet und die betreffenden Curven markirt.) Solche Curven sind verhältnissmässig selten.

Es wurden die Ordinaten gemessen, welche den Werthen  $T/16$ ,  $T/8$ ,  $T/4$  entsprechen.

$T$ 16	$T$ 8	$T$ 4	$T$ 16	$T$ 8	$T$ 4	$T$ 16	$T$ 8	$T$ 4
0,99	1,80	2,62	1,04	1,80	2,63	1,07	1,80	2,59
1,01	1,82	2,61	1,04	1,81	2,63	1,02	1,81	2,59
1,02	1,84	2,59	1,03	1,85	2,61	1,04	1,80	2,61
0,98	1,80	2,60	1,02	1,80	2,58	1,05	1,82	2,61
1,03	1,81	2,60	1,06	1,82	2,59	0,99	1,83	2,59
0,96	1,84	2,61	1,03	1,81	2,60	0,96	1,82	2,59
1,03	1,82	2,63	1,04	1,82	2,61			
Mittel						1,020	1,816	2,605

Berechnet man mittelst der gefundenen Amplitude die Werthe der Ordinaten für  $T/16$  und  $T/8$ , so findet man:

berechnet	0,997	1,842
beobachtet	1,020	1,816

Diese Abweichungen können, da sie einmal im positiven, einmal im negativen Sinne erfolgen, nicht wohl durch das Mitklingen des dritten Partialtones erklärt werden; sie müssen vielmehr als Beobachtungsfehler betrachtet werden (namentlich die Schreibvorrichtung dürfte daran Schuld sein). Diese Abweichungen liegen jedoch in solchen Grenzen, dass die Schwingung mit Recht als eine einfache Sinusschwingung bezeichnet werden kann.

II. (Curve C). Schwingungsform bei mittelstarkem Drucke. (190 mm Wasser.) Maximaldruckunterschied 258 mm. Mittlere Schwingungszeit 5 Secunden.

Auch bei dieser Curve wurden die zu den Abscissenwerthen  $T/16$ ,  $T/8$ ,  $T/4$ ,  $3T/8$  zugehörigen Ordinatenwerthe ausgemessen und aus den Werthen für jede Ordinate dann das Mittel gebildet.

Diese Auswerthung ergab:

$t$	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{3T}{8}$	$T$
$y$	0	35	44	36	32

Berechnet man nach der Fourier'schen Reihe:

$$y = \sum_a \left( A_a \cos a \frac{2\pi t}{T} + B_a \sin a \frac{2\pi t}{T} \right),$$

(wobei im Falle der gedackten Pfeifen  $a$  die ungeraden Zahlen durchläuft) die Werthe der Partialamplituden  $R_a = \sqrt{A_a^2 + B_a^2}$  und die Phasen  $\text{tg } \varphi_a = A_a/B_a$ , so erhält man, wenn man nur den ersten und dritten Ton berücksichtigt:

$$R_1 = 47,10, \quad \varphi_1 = -0^\circ 26'; \quad R_3 = 3,124, \quad \varphi_3 = 6^\circ 30,4'.$$

$$\text{Phasendifferenz: } \varphi_3 - \varphi_1 = 6^\circ 56'.$$

Wird mittelst dieser Coëfficienten der (noch gemessene) Werth für  $T/16$  berechnet, so ergibt sich statt:

$$22 - 20,7.$$

III. (Curve A). Schwingungsform bei starkem Anblasen (400 mm Wasser). Maximalwerth des Druckunterschiedes 305 mm. Dauer einer Schwingung zwischen 2 und 3 Secunden.

Wurde die Pfeife mit solcher Stärke angeblasen, so war es sehr schwer, sie mit der Gabel in genügende Uebereinstimmung zu bringen. Bei nicht ganz vollkommener Uebereinstimmung wechselte das Manometer sprungweise zwischen seiner Maximal- und Minimallage.<sup>1)</sup> Alsdann konnte das Manometer, den früheren Angaben zufolge, kein richtiges Bild des Schwingungsvorganges mehr geben. Es gelang jedoch auch hierbei, mit Mühe allerdings, die Pfeife genau genug abzustimmen. Alsdann wurde die Curve A er-

1) Ganz ähnliche Verhältnisse fanden Töpler und Boltzmann; siehe oben erwähnte Abhandlung Pogg. Ann. 141. p. 321. 1870.

halten, welche den Einfluss des nunmehr stärker auftretenden dritten Obertones auf den Grundton evident darstellt.

Zum Zwecke der Bestimmung dieses Einflusses wurde die Curve in ihre Partialschwingungen zerlegt. Es wurden die zu dem Maximum, resp. Minimum der Ordinaten zugehörigen Abscissen gemessen (ebenso die zu den Werthen  $T/16$ ,  $T/8$ ,  $T/4$  zugehörigen Ordinaten) und aus vielen Messungen das Mittel gebildet; dies ergab:

$t$	0	$T$	$T$	$42 T$	$T$	$73 T$
		16	8	2.100	4	2.100
$y$	0	28	41	36	40	53

die  $T/2$  entsprechende Abscisse = 100 gesetzt. Für den Werth  $73 T/100$  kann, weil er einem Maximalwerthe der Ordinate entspricht,  $3T/8$  gesetzt werden.

Aus den Werthen:

$t$	0	$T$	$T$	$3 T$
		8	4	8
$y$	0	41	40	53

findet man die Partialamplituden und Phasen:

$$R_1 = 53,39, \quad \varphi_1 = -4^\circ 33,5'; \quad R_3 = 13,88, \quad \varphi_3 = 17^\circ 47,6';$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 = 22^\circ 21'.$$

Die Intensität der Partialtöne ist gleich dem Quadrate der Amplituden zu setzen.

Bestimmt man mittelst dieser Werthe die Ordinaten für:

$$\frac{T}{16} \quad \text{und} \quad \frac{42 T}{2.100}, \quad \text{so findet man:}$$

$$y \begin{cases} 30,3 \\ 28 \end{cases} \quad \begin{cases} 37,9 \\ 36 \end{cases} \begin{array}{l} \text{berechnet,} \\ \text{beobachtet.} \end{array}$$

Diese Abweichungen liegen innerhalb der Beobachtungsfehler. Ein merklicher Einfluss des fünften Obertones kann daher nicht nachgewiesen werden.

In Fig. *D* und *E* sind noch zwei Schwingungsformen der zuerst erwähnten Pfeife beigegeben, welche bei mittlerem und starkem Anblasedrucke aufgezeichnet wurden. Man sieht, wie die Formen bei verschiedenen Pfeifen wechseln können.

Auch in freier Luft wurden Beobachtungen über die Schallintensität angestellt. Es stellte sich heraus, dass die Luftverdichtungen, resp. Verdünnungen, welche von einer mässig angeblasenen Pfeife in der freien Luft (selbst in der Entfernung von 4 m) erzeugt wurden, noch sehr messbare Manometerausschläge gaben. Diese lagen noch lange nicht an der Grenze der Empfindlichkeit der Vorrichtung. Da sich jedoch in dem kleinen Beobachtungsraume stehende Wellen ausbildeten, die nachweisbare Druckmaxima und -minima hervorriefen, mussten die hierher gehörigen Versuche aufgegeben und auf eine spätere Zeit aufgeschoben werden.

#### § 4. Untersuchungen über Phasendifferenzen der Bewegung tönender Luftsäulen.

Auf einen Vorschlag des Hrn. v. Helmholtz wurde eine Combination zweier Schallventile zur Untersuchung von Phasendifferenzen in tönenden Luftsäulen verwandt.

Hr. v. Helmholtz stellt in seinem Aufsatz: „Ueber Schwingungen offener Röhren,“<sup>1)</sup> folgende Gleichung auf:

$$(I) \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{A}{\cos k\alpha} \cos k(x - \alpha) \cos 2\pi nt + A \frac{k^2 Q}{2\pi} \sin kx \sin 2\pi nt,$$

wobei  $\psi$  das Geschwindigkeitspotential,  $\alpha$  die Entfernung des Maximums der Schwingungen von der Mundöffnung,  $Q$  den Querschnitt des cylindrischen Rohres,  $n$  die Schwingungszahl pro Secunde,  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  Wellenlänge) und  $A$  eine Constante bezeichnet.

Setzt man:

$$J = A \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 k(x - \alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2 \sin^2 kx}{4\pi^2}},$$

$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{k^2 Q \sin kx \cos k\alpha}{2\pi \cos k(x - \alpha)},$$

so erhält man für die Gl. (I):

$$\frac{d\psi}{dx} = J \cos(2\pi nt + \tau).$$

Die Werthe von  $x$ , für welche  $J^2$  ein Maximum, resp. Minimum wird, gibt die Gleichung:

1) v. Helmholtz, Journ. f. reine und angewandte Mathematik. 57. p. 1.

$$(II) \quad \operatorname{tg} 2k(x - \alpha) = \frac{k^4 Q^2 \sin k\alpha \cos^2 k\alpha}{2\pi^2 \left(1 - \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \cos^2 k\alpha\right)}.$$

Wird nun  $k^2 Q$  als unendlich kleine Grösse betrachtet, so wird die Gl. (II) mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$\operatorname{tg} 2k(x - \alpha) = 0.$$

Dann wird  $J^2$  ein Maximum  $= J_{(\max)}^2$ , wenn:

$$k(x - \alpha) = a\pi; \quad \cos k(x - \alpha) = \pm 1;$$

$$J_{(\max)}^2 = \frac{A^2}{\cos^2 k\alpha},$$

und Minimum  $= J_{(\min)}^2$ , wenn:

$$k(x - \alpha) = \pi(a + \frac{1}{2}); \quad \cos k(x - \alpha) = 0;$$

$$J_{(\min)}^2 = A^2 \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \cos^2 k\alpha.$$

Im Schwingungsbauche (Maximum der Bewegung) wird  $\operatorname{tg} \tau$  eine unendlich kleine Grösse, also  $\tau = a\pi$ . Im Knoten dagegen wird  $\operatorname{tg} \tau = \infty$ ,  $\tau = (a + \frac{1}{2})\pi$ , also liegen die Phasen der Bewegung im Bauch und Knoten um  $\frac{1}{4}$  Undulationszeit auseinander.

Diese Phasendifferenz wird sich mit Hülfe der Schallventile folgendermassen ermitteln lassen.

Zwei Schallventile, durch dieselbe periodische Kraft zu derselben Zeit geöffnet und geschlossen, werden Manometerschwingungen von derselben Periode und Phase haben, wenn wir sie mit einer tönenden Luftsäule in Verbindung setzen, die überall gleiche Phase hat. Ändert sich jedoch die Phase an einer Stelle um einen constanten Werth, so werden auch die Manometer dieselbe Phasendifferenz anzeigen.

Setzt man in den Knoten und den Bauch einer Pfeife je ein solches abgestimmtes Ventil, so werden deren Manometer eine etwa vorhandene Phasendifferenz angeben müssen. [Auch im Schwingungsmaximum der Pfeife treten deutlich nachweisbare Druckänderungen auf (bis zu 15 mm Wasser).]

Vorher muss man sich aber vergewissern, ob die Ventile wirklich den gestellten Anforderungen genügen, d. h. ob sie

genau zur selben Zeit abschliessen (das Abschliessen ist das Wesentliche) und nicht etwa in ihrer eigenen Bewegung schon eine Phasenverschiebung zeigen. Deshalb wurden die Ventile beide mit dem Knoten derselben Pfeife verbunden. Eins davon war ein electromagnetisches, das andere ein Stimmgabelventil. Das electromagnetische Ventil öffnete sich jedesmal, wenn die obere Gabelzinke, welche das andere Ventil bewegte, ihre tiefste Lage erreicht hatte und den Stromschluss durch einen Quecksilbercontact herstellte. Zu derselben Zeit deckten sich auch die Spalte.

Diese Ventile zeigten eine constante Phasenverschiebung, welche nicht beseitigt werden konnte, und zwar schloss sich das electromagnetische Ventil später. Dies ist leicht erklärlich, wenn man bedenkt, dass an dem Platinstift des Quecksilbercontactes beim Austauschen ein Quecksilberfaden adhärirt, welcher den Stromschluss verlängert. Auch kommt die Zeit wohl noch in Betracht, welche der Magnetismus zum Verschwinden braucht. Diese Phasendifferenz der Ventile kann leicht constant erhalten werden.

Wird nun eins der Ventile in den Schwingungsbauch<sup>1)</sup> gebracht, so zeigt sich sofort, dass (wenn wir von der constanten Differenz absehen) die Manometermaxima nahe um  $\frac{1}{4}$  Undulationszeit differiren.

Dieser Versuch dürfte wohl als eine experimentelle Bestätigung des theoretischen Ergebnisses angesehen werden.

Mehrere von den in dieser Abhandlung erwähnten Apparaten wurden in der mechanischen Werkstatt von Max Wolz (Bonn) mit bekannter Präcision und Eleganz ausgeführt.

Phys. Laborat. der Univ. Berlin, im Herbst 1888.

1) Dasselbe wurde in die Pfeifenwand gerade in Höhe der Mündung eingesetzt.



## II. Untersuchungen über die Festigkeit des Glases; von Joseph von Kowalski.

### Einleitung.

Eins der interessantesten Capitel der Molecularphysik der festen Körper bildet die Lehre von der Festigkeit der Körper. Sie hat sogar, wie Lamé sagt, die Veranlassung gegeben zu dem Aufbau der Theorie der Elasticität. Und wenn auch zahlreiche Versuche<sup>1)</sup> über die Festigkeit von allerlei Körpern vorliegen, so können sie nur dazu dienen, der Technik gewisse Anhaltspunkte zu geben, wie weit man die Materialien in Anspruch nehmen darf, ohne sie zum Bruche zu bringen. Ueber die wahre Ursache des Bruches wurden aber nur Hypothesen aufgestellt, von denen zwei hauptsächlich hervorgehoben werden und als Grundlage zur Theorie der Festigkeit bei technischen Anwendungen gelegt wurden..

Nach der ersten nimmt man an, dass es eine gewisse Grenze für die inneren Spannungen gibt, die man nicht überschreiten darf, ohne den Körper zum Bruche zu bringen. Es ist die Hypothese, welche Clebsch in seinem Lehrbuche der Elasticität zu Grunde legt, um gewisse Gleichungen, welche technischen Zwecken dienen können, abzuleiten.

Die zweite Hypothese geht davon aus, dass die lineare Dilatation eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, und dass der Körper dort zu brechen anfängt, wo bei einer gewissen Deformation die grösste lineare Dilatation eintritt. Diese letzte Hypothese wurde schon von Mariotte aufgestellt in seinem: „*Traité du mouvement des eaux*“<sup>2)</sup> an der Stelle, wo er von der Festigkeit der Leitungsröhren spricht; sie wurde auch später von vielen Gelehrten, wie z. B. F. Neumann und Barré de Saint-Venant, wieder aufgenommen.

Es ist aber meines Wissens gar keine directe Beobachtung gemacht worden, aus der man etwas bestimmtes

1) Zahlreiche Literaturangaben über den Gegenstand finden sich in Violle, Cours de phys. 1. p. 463.

2) Mariotte, Oeuvres p. 455. 1740.

über die wahre Ursache der Grenze der Festigkeit sagen könnte.<sup>1)</sup>

Auf Anregung des Hrn. Prof. W. Voigt habe ich daher die vorliegende Untersuchung unternommen, da es nicht uninteressant erscheint, die Hypothesen über die wahre Ursache des Eintritts des Bruches, einer experimentellen Prüfung zu unterziehen.

Als Material habe ich Glas gebraucht, da mir von Hrn. Prof. Voigt Glasstäbchen gütigst zur Verfügung gestellt wurden, die sich sehr gut zu der Untersuchung eigneten. Sie waren in der Fabrik von Greiner und Friedrichs in Stützerbach eigens zu diesem Zwecke hergestellt und besonders aus einem Gusse, der frei von Blasen war, gezogen und dann recht vorsichtig und langsam gekühlt. Ich konnte also voraussetzen, dass ich es mit einem ziemlich isotropen Körper zu thun haben würde. Die Untersuchung machte ich, indem ich die Glasstäbchen dem Zerreißen, Zerdrehen, Zerbrehen und Zerreißen combinirt mit Zerdrehen unterwarf und jedesmal die dabei eintretende Spannung und lineare Dilatation berechnete. Die lineare Dilatation in einer gewissen, durch die Richtungscosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmten Richtung ist durch die Formel:

$$(1) \quad A = \alpha^2 x_x + \beta^2 y_y + \gamma^2 z_z + \beta\gamma y_z + \gamma\alpha z_x + \alpha\beta x_y$$

gegeben, die sich durch Einführung sphärischer Coordinaten  $\vartheta$  und  $\varphi$  auch in folgender Form schreiben lässt:

$$(2) \quad A = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi x_x + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi y_y + \cos^2 \vartheta z_z + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \sin \varphi y_z + \frac{1}{2} \cos \varphi \sin 2\vartheta z_x + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi.$$

Die Richtung der grössten Dilatation ist also bestimmt durch die Werthe von  $\varphi$  und  $\vartheta$ , die man aus den Gleichungen:

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi} = 0, \quad \frac{\delta A}{\delta \vartheta} = 0 \quad \text{zieht.}$$

Wenn man die so erhaltenen Werthe von  $\varphi$  und  $\vartheta$

1) Von älteren Arbeiten erwähnt Frankenheim in seiner „Lehre der Cohäsion“ (1835) eine Arbeit von Sickingen vom Jahre 1782 über die Festigkeit des Platins bei verschiedener Art von Belastung, die er als rein wissenschaftliche Untersuchung und als eine in jeder Beziehung physikalische Musterarbeit nach den damaligen Begriffen bezeichnet. Leider ist mir die Arbeit, die im Jahre 1782 erschienen sein soll, nicht zugänglich gewesen. —

in dem Ausdrucke (2) für  $A$  einsetzt, lässt sich leicht auch die Abhängigkeit des Werthes von  $A$  im Punkte  $x, y$  von dessen Lage im Querschnitte untersuchen.

Auf ähnliche Weise lässt sich auch das Druckellipsoid untersuchen und der Werth und die Richtung der grössten Spannung bei einer gewissen Art von Deformation bestimmen.<sup>1)</sup> Die Versuche wurden bei verschiedenen Temperaturen gemacht. Indessen hat sich herausgestellt, dass in den von mir innegehaltenen Grenzen ( $10^{\circ} \dots 20^{\circ}$ ) der Einfluss der Wärme so klein ist, dass er vernachlässigt werden kann.

Im allgemeinen stellte ich die Festigkeitsversuche in der Weise an, dass die allmähliche Belastung in einem fort erfolgte. Es wurden aber auch einige Versuche so ausgeführt, dass das Stäbchen einer gewissen Belastung längere Zeit unterworfen wurde und dann erst einer grösseren. Es ergab sich die merkwürdige Thatsache, dass das Verhalten der Glasstäbchen in dem Falle anders ist. Ich gedenke in einer späteren Arbeit auf den Gegenstand näher einzugehen.

## Theil I.

### Bestimmung der Constanten.

Zunächst kam es darauf an, die Elasticitätsconstanten der gebrauchten Glassorte zu bestimmen. Ich habe sie durch Beobachtungen über die Biegung und Torsion der Glasstäbchen gefunden.

Zu dem Ende mussten zunächst die Dimensionen der Stäbchen auf's genaueste gemessen werden, was ich mit Hülfe eines Fühlhebels mit Wasserwage von Repsold ausführte. Ich will mich hier nicht näher auf die Beschreibung dieses bekannten Instrumentes einlassen, sondern nur hervorheben, dass einer Umdrehung der Schraube 0,2042 mm entsprachen. Die Trommel der Schraube war in 200 Theile getheilt, und da einer Drehung um einen Theil eine Verschiebung der Luftblase in der Wasserwage noch um 2 mm entsprach, konnte die Dickenmessung bis auf 0,0005 mm genau geschehen. Da die Glasstäbchen von nahezu elliptischem

1) Clebsch, Theorie der Elast. § 6.

Querschnitt waren, so musste ich zunächst den grössten Durchmesser messen, welcher vermittelt des gebrauchten Dickenmessers recht leicht zu ermitteln war. Es wurde dann eine kleine Längsmarke an einem Ende des Stabes mit einem Diamanten gezogen, um die Lage des grössten Durchmessers zu fixiren. Dann wurden die auf diesen senkrecht und unter  $45^\circ$  stehenden Durchmesser gemessen. Diese Messungen wurden an jedem Stäbchen an Stellen, welche in je 2 cm Entfernung voneinander lagen, angestellt.

Es zeigte sich, dass die Durchmesser bei einem und demselben Stäbchen nicht viel voneinander abwichen. Es wurden daher bei der Berechnung der Constanten die arithmetischen Mittel der Querdiameter als Diameter des Querschnittes des Stäbchens genommen.

Die Biegeconstante. — Der Apparat, mittelst dessen ich die Biegung der Glasstäbchen mass, war ähnlich dem, den schon früher Baumgarten<sup>1)</sup> gebraucht und beschrieben hat, und wurde mir gütigst von Hrn. Prof. Voigt geliehen.

Das Stäbchen wurde auf beiden Schneiden des Apparates in der Weise aufgelegt, dass die grösste Axe des Querschnittes horizontal war. Auf die Weise konnte man ein ziemlich stabiles Gleichgewicht erzielen.

Die Senkung bei der Biegung wurde mit Hülfe eines fest mit dem Apparat verbundenen Mikrometernikroskops gemessen. Einer Umdrehung der Trommel entsprachen 0,0328 mm, wie es die Auswerthung an einem in  $\frac{1}{50}$  mm getheilten Glasgitter ergab. Die Trommel der Mikrometerschraube war in 100 Theile getheilt, die absolute Senkung konnte bis auf 0,033 mm abgelesen werden. Das Fadenzkreuz wurde immer auf den untersten Rand des Stäbchens aufgestellt, der, indem man das Stäbchen von hinten beleuchtete, scharf zu sehen war. Es wurde jedesmal das Fadenzkreuz dreimal auf den Rand eingestellt, und von den sich ergebenden Werthen in Trommeltheilen das arithmetische Mittel genommen. Zur Berechnung der Elasticitätsconstanten wurde die Formel:

$$E = \frac{1}{12} \frac{l^3}{s a b^3 \pi} \quad \text{benutzt.}$$

1) Baumgarten, Pogg. Ann. 152. p. 369. 1874.

Dabei bedeutet  $l$  die in Rechnung zu ziehende Länge des Stäbchens, d. h. die Entfernung der beiden Schneiden voneinander, die mittelst eines Maassstabes, welcher in halbe Millimeter getheilt war, gemessen wurde,  $a$  die grosse,  $b$  die kleine Axe der Querschnittsellipse,  $s$  die Senkung der Mitte des Stäbchens für 1 g Belastung. Diese letzte Grösse wurde aus vier Beobachtungen mit den entsprechenden Belastungen: Schale + 50 g; Schale + 100 g; Schale + 150 g; Schale + 200 g berechnet. Dabei war das Gewicht der Schale = 20,1 g.

Die Beobachtungen ergaben Folgendes:

	$l$	$a$	$b$	$10^7 s$	$10^{-3} E$		$l$	$a$	$b$	$10^7 s$	$10^{-3} E$
1.	89	1,1103	1,1022	1857	6753	9.	90	0,8342	0,8136	6152	6647
2.	90	0,9005	0,8673	4952	6646	10.	90	0,8334	0,8126	6181	6650
3.	63	1,0352	1,0169	9086	6707	11.	90	0,7491	0,7205	2845	6649
4.	90	1,1952	1,1734	1434	6744	12.	90	0,7867	0,7728	2235	6658
5.	90	1,1964	1,1705	1431	6741	13.	90	1,1406	1,1291	1714	6732
6.	90	1,7311	1,6976	0315	6751	14.	90	1,1500	1,1367	1662	6729
7.	90	0,9225	0,9036	4070	6701	15.	90	0,9129	0,9022	4202	6704
8.	90	0,9210	0,9027	4089	6705	16.	90	0,9201	0,9089	4078	6713

Gesamtmittel  $E = 6\,702\,000$ .

Wahrscheinlicher Fehler  $\pm 7\,200$ .

Die Torsionsconstante. — Die ziemlich grosse Länge der Glasstäbchen erlaubte mir, ein einfaches Verfahren bei der Bestimmung der Torsionsconstanten anzuwenden. Der Apparat wurde mir von dem hiesigen physikalischen Institute zur Verfügung gestellt. Die Anordnung war folgende:

Das obere Ende des Stäbchens wurde an einem fest in die Wand eingeschlagenen Halter vertical befestigt. An dem unteren Ende wurde eine horizontale Torsionsrolle angebracht. Von derselben liefen zwei dünne, gut ausgeglühte Drähte von genau gleicher Länge über je eine Rolle mit horizontaler Axe. Am Ende der dünnen Drähte war ein Querstab befestigt, der seinerseits in der Mitte an einem kleinen Haken die Schale trug. Der Querstab war aus leichtem Holz und hatte genau die Länge gleich dem Abstände der beiden entferntesten Punkte der beiden Rollen.

Die beiden Rollen, um welche die Drähte liefen, waren in je einer tragenden Gabel auf einem Brettchen befestigt. Um die Reibung möglichst klein zu machen, bewegten sich

die Rollen auf Spitzen von Schrauben, welche in die Enden der tragenden Gabeln hineingebohrt waren. Die beiden Rollen wurden in eine solche Lage in Bezug auf die Torsionsrolle gebracht, dass erstens der Einschnitt der Torsionsrolle und der obere Rand des Einschnittes der beiden anderen Rollen in einer horizontalen Ebene lag; das geschah einfach, da die Stäbchen von ziemlich gleicher Länge waren, durch die Verschiebung in der oberen Befestigung des Stäbchens; zweitens so, dass auf die Torsionsrolle nur ein Drehungsmoment ausgeübt wird. Das letzte geschah durch Verschiebung der beiden Rollen mit dem Brettchen, auf welchem sie auf dem Untersatz, der fest mit der Wand verbunden war, befestigt waren, und wurde controlirt, indem man auf das untere Ende des Stäbchens das Fadenkreuz eines kleinen Fernrohrs einstellte, das auch fest mit der Wand verbunden war. Die Befestigung der beiden Enden des Glasstäbchens geschah durch Festkitten in zwei kleinen Messingklötzen, die einerseits in der Fassung der Torsionsrolle, andererseits in der des oberen Halters durch Schrauben festgeklemt wurden.

Die Einrichtung, um den Drehungswinkel abzulesen, war folgende: dicht bei den Fassungen waren an dem Stäbchen zwei Zeiger angeklemt. Die Klemmvorrichtung war der Art, dass das Stäbchen nur in den Randpunkten eines Querschnittes gefasst wurde; es konnte also die Entfernung der beiden gefassten Querschnitte mittelst eines Stangen-cirkels mit genügender Genauigkeit gemessen werden. An dem Ende des Zeigers war ein kleiner Glasmaassstab von ungefähr 1 cm Länge befestigt. Er war mit einer photographischen Theilung in  $\frac{1}{16}$  mm versehen, ähnlich den Theilungen bei Maassstäben der spectralanalytischen Apparate, sodass, wenn er von hinten beleuchtet wurde, die Theilung recht gut mittelst eines fest mit der Wand verbundenen Mikroskopes bis auf die zu schätzenden Zehntel der Theilung abzulesen war. Die Länge des Zeigers betrug 99,5 mm, also erlaubte die Einrichtung, noch Winkel von 5" abzulesen.

Der Winkel für eine Belastung von einem Gramm, den wir  $\psi$  nennen wollen, wurde aus vier Belastungen,  $P$ ,  $2P$ ,  $3P$ ,  $4P$  nach der Methode der kleinsten Quadrate berech-

net. Zur Berechnung der Constanten wurde die Formel von de Saint-Venant gebraucht, nämlich:

$$T = 39,48 R \frac{l(x^2 + \lambda^2)}{\psi \sigma^3},$$

worin:

$R$  der Radius der Torsionsrolle, bei meinen Apparaten war  $R = 49,5$  mm,

$l$  die in Rechnung zu ziehende Länge des Glasstäbchens,

$x$  und  $\lambda$  die Trägheitsradien des elliptischen Querschnitts,

$\sigma$  die Fläche desselben und

$\psi$ , wie schon erwähnt, der Drehungswinkel bei einem Gramm Belastung.

Schliesslich will ich bemerken, dass die Hauptfehlerquellen bei unserem Verfahren der Bestimmung der Torsionsconstanten im Folgenden liegen.

1) In der Reibung der kleinen Rollen,

2) In der ungenauen Einstellung der beiden kleinen Rollen in Bezug auf die Torsionsrolle,

3) In der Schwierigkeit der Messung der in Rechnung zu ziehenden Länge des Stäbchens.

Es liess sich aber alles dies so weit beseitigen, dass die Genauigkeit der Methode für meine Zwecke völlig ausreichend war. Die Beobachtungsreihe ist folgende:

$l$	$a$	$b$	$\psi$	$10^{-3}T$	$l$	$a$	$b$	$\psi$	$10^{-3}T$
1. 257	1,1406	1,1291	6' 12,5"	2704	7. 254	1,0355	1,0167	9' 8,5"	2712
2. 264	1,7311	1,6976	1 11,5	2784	8. 252	0,8342	0,8136	21 40,1	2724
3. 261	1,1190	1,0741	7 4,2	2709	9. 261	1,1451	1,1336	6 9,2	2732
4. 251	0,9249	0,9029	14 26,6	2766	10. 253	0,9278	0,9088	13 53,9	2707
5. 258	1,1952	1,1734	5 18,2	2746	11. 253	1,1390	1,1336	6 3,6	2710
6. 251	0,9225	0,9026	13 32	2762					

Gesamtmittel  $T = 2\,732\,000$ .

Wahrscheinlicher Fehler 5 600.

Da:  $E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$ ,  $T = \mu$  ist, so ergibt sich:

$$\mu = 2\,732\,000, \quad \lambda = 2\,262\,500$$

und weiter das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation:

$$\alpha = 0,226.$$

Also eine Zahl, die merkwürdigerweise sehr nahe der, welche Hr. Prof. Voigt gefunden hat, liegt.



## Theil II.

## Untersuchungen der Festigkeit.

## 1) Festigkeit bei einseitigem Zug.

Bei diesen Beobachtungen wurde ein Glasstäbchen von ungefähr 4 bis 8 cm Länge in zwei Halter eingekittet, sodass ungefähr 1,5 bis 2 cm ausserhalb der Fassungen waren. Es wurde zuerst zum Kitten gewöhnlicher Siegellack benutzt, er erwies sich aber bald als zu spröde, und deswegen benutzte ich später Schellack. Die obere Fassung des Stäbchens wurde an einem Querstabe zwischen zwei Stellischen befestigt; an die untere wurde eine Schale aufgehängt mittelst einer Vorrichtung, die etwaige kleine Schwingungen der Schale dem befestigten Stäbchen nicht übermittelte. Die Belastung geschah zunächst durch behutsames Auflegen von grösseren Gewichtsstücken und dann durch Zuschütten von Schrotkörnern in einen auf der Schale stehenden Kasten, bis zum Bruch fortgesetzt. Das Zuschütten wurde sehr leise gemacht, und um die Stösse möglichst zu vermeiden, geschah es durch eine kleine Rinne, die bis über den Kasten, der auf der Schale lag, führte. Von den Beobachtungen wurden nur die gebraucht, bei denen der Bruch ausserhalb der Fassungen geschah, also bei welchen man voraussetzen konnte, dass der Bruch nicht von Sprüngen, die im Glase beim Einkitten entstehen konnten, zu Stande gekommen war.

Die Brüche, welche von einem Stosse herrührten, wurden selbstverständlich nicht in Rechnung gezogen.

Wie bekannt, ist die Spannung wie auch die Dilatation bei der einfachen Dehnung am grössten parallel der  $z$ -Axe, d. h. der Längsaxe des Stäbchens. Es wurde also der Druck pro Quadratmillimeter, der nöthig war, um das Stäbchen zum Zerreißen zu bringen, und die entsprechende lineare Dilatation in der Richtung der  $z$ -Axe berechnet. Dabei wurde die Formel benutzt:

$$\lambda_z = \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{C}{2\mu + 3\lambda},$$

wo  $C$  der Druck pro Quadratmillimeter.

Die Versuche ergaben Folgendes:

(P Gesamtblastung in Grammen.)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>P</i>	<i>C</i>	$10^6 \lambda_z$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>P</i>	<i>C</i>	$10^6 \lambda_z$
1. 1,0385	1,0185	28672	8628	1293	16. 0,8888	0,8627	21227	8812	1325
2. 1,0034	0,9835	27839	8981	1346	17. 0,7785	0,7667	16530	8815	1321
3. 0,9917	0,9809	27443	8971	1344	18. 1,0516	1,0297	29540	8684	1301
4. 1,0132	0,9985	27941	8791	1317	19. 1,0404	1,0220	28898	8651	1297
5. 1,1154	1,0688	32341	8635	1294	20. 1,0348	1,0108	28454	8659	1291
6. 1,0156	0,9972	27619	8683	1301	21. 1,0562	1,0316	29021	8676	1300
7. 1,1227	1,0613	32905	8790	1317	22. 0,9311	0,9199	23441	8712	1305
8. 1,1407	1,1256	34796	8667	1299	23. 0,9291	0,9092	23082	8697	1304
9. 1,1456	1,1252	35829	8847	1326	24. 0,9309	0,9098	23093	8679	1301
10. 1,1514	1,1121	35756	8889	1332	25. 0,9282	0,9074	23048	8706	1305
11. 0,8066	0,7989	17778	8787	1314	26. 1,1887	1,1602	37998	8777	1315
12. 0,8438	0,8255	19153	8752	1312	27. 1,1838	1,1627	37919	8774	1315
13. 0,8239	0,8004	18279	8823	1322	28. 1,1792	1,1589	37524	8740	1310
14. 0,8530	0,8352	19469	8699	1304	29. 1,0120	0,9982	28028	8754	1312
15. 0,8959	0,8612	21245	8765	1314	30. 1,0362	1,0021	28501	8737	1309

Gesamtmittel  $\lambda_z = 0,001310$ Wahrscheinlicher Fehler  $\pm 0,000004$ .

Bei allen diesen Versuchen, ebenso wie bei den späteren Versuchen mit dem Zerdrehen und Zerdrehen combinirt mit Zug, wurden die Dimensionen, nachdem der Bruch erfolgt ist, gemessen. Die Messung geschah an den beiden Bruchflächen, und von den sich dort ergebenden Werthen für *a* und *b* wurde das arithmetische Mittel genommen. Als Ergebniss aus den Versuchen erhalten wir, dass die grösste lineare Dilatation  $\lambda_z = 0,00131$ , eine Zahl, die grösser ist, als die von F. Neumann<sup>1)</sup> aus den Versuchen von Brewster berechnete. Man sieht auch aus den vorhergehenden Zahlen, dass die Versuche so weit übereinstimmen, dass ich annehmen konnte, mit einem ziemlich einheitlichen Material zu thun zu haben.

## 2) Festigkeit bei der Biegung.

Um die Festigkeit bei der Biegung zu untersuchen, wurde derselbe Apparat benutzt, welcher schon zur Bestimmung der Biegungsconstante gedient hatte. Das Stäbchen wurde so auf die beiden Schneiden des Apparates gelegt, dass die grosse Axe horizontal war, und dann wurde es in der Mitte bis zum Bruch belastet. Die Belastung geschah durch Zuschütten von Schrot in einen Kasten, der die Schale ersetzte. Dies musste mit der grössten Vorsicht ge-

1) F. Neumann, Gesetze der Doppelbrechung des Lichts (1841) berechnet  $\lambda_z = 0,0,7$ , vermuthet aber, dass die wahre Zahl grösser ist.

schehen, denn jeder kleine Stoss hatte hier schon einen bedeutenden Einfluss.

Die Dimensionen des Stäbchens müssen vorher bestimmt werden. Sie wurden ebenso ermittelt, wie bei der Bestimmung der Elasticitätsconstanten.

Wie bekannt, findet bei dieser Art Biegung die grösste Spannung, wie auch die grösste lineare Dilatation in der dem niedrigsten Punkte der Mitte des Stäbchens statt. Die grösste Spannung wurde nach der Formel von Clebsch<sup>1)</sup>:

$$R = \frac{E \cdot b}{\varrho}$$

berechnet, wobei  $E$  die Bieigungsconstante,  $b$  der Abstand des niedrigsten Punktes von der Hauptaxe, um welche die Biegung geschieht,  $\varrho$  der Krümmungsradius in demselben Punkte der Curve dritten Grades, in welche bei dieser Art von Deformation die Geraden parallel der  $z$ -Axe übergehen, bedeutet.

Für die grösste Dilatation, die auch im niedrigsten Punkte parallel der  $z$ -Axe stattfindet, haben wir den Ausdruck von Neumann<sup>2)</sup>:

$$\lambda_z = \frac{3 \cdot b \cdot s \cdot P}{\left(\frac{l}{2}\right)^3},$$

wobei  $s$  die Senkung bei 1 g Belastung,  $P$  die Belastung und  $l$  die in Rechnung zu ziehende Länge des Stäbchens ist. Es ergaben sich folgende Resultate:

$l$	$a$	$b$	$P$	$R$	$10^6 \lambda_z$	$l$	$a$	$b$	$P$	$R$	$10^6 \lambda_z$
1. 90	0,8342	0,8136	176	8786	1311	16. 40	0,8340	0,8137	382	8806	1314
2. 90	0,8334	0,8126	177	8819	1316	17. 40	0,8333	0,8127	382	8846	1320
3. 90	1,1406	1,1291	463	8893	1327	18. 40	1,1407	1,1291	1013	8893	1327
4. 90	1,1500	1,1367	473	8853	1321	19. 40	1,1500	1,1367	1041	8920	1331
5. 90	0,9129	0,9022	234	8806	1314	20. 90	1,1103	1,1022	427	8853	1321
6. 90	0,9201	0,9028	238	8779	1310	21. 90	0,9005	0,8673	207	8866	1323
7. 60	0,9248	0,9029	345	8759	1307	22. 90	1,1952	1,1734	535	8940	1334
8. 60	0,9264	0,9011	353	8987	1341	23. 90	1,1964	1,1705	536	8920	1331
9. 90	1,1402	1,1298	454	8953	1336	24. 90	1,7311	1,6976	1609	8819	1316
10. 90	1,1410	1,1284	447	8806	1314	25. 90	0,9225	0,9036	241	8793	1312
11. 60	0,9121	0,9096	345	8712	1300	26. 90	0,9210	0,9027	254	8900	1328
12. 60	0,9201	0,9089	349	8793	1312	27. 63	1,0355	1,0169	375	8826	1317
13. 60	0,9203	0,9084	357	8980	1340	28. 60	0,7491	0,7205	193	8860	1322
14. 40	0,9127	0,9024	512	8779	1310	29. 60	0,7667	0,7728	232	8980	1340
15. 40	0,9200	0,9090	523	8752	1306						

Gesamtmittel  $\lambda_z = 0,001\ 320$

Wahrscheinlicher Fehler  $\pm 0,000\ 003.$

1) Clebsch, l. c.

2) Neumann, l. c. p. 50.

## 3) Festigkeit bei der Torsion.

Die Versuche wurden folgendermassen angestellt: Die Stäbchen waren zunächst ebenso wie bei den Versuchen über den einseitigen Zug in zwei Halter eingekittet und zwischen zwei Stellischen an einem Querstab befestigt. An dem unteren Halter war eine Torsionsrolle vom Radius  $r=49,5$  mm angebracht, von welcher, ähnlich wie bei der Bestimmung der Torsionsconstanten, zwei gut ausgeglühte Drähte über zwei andere Rollen liefen. An dem Ende der Drähte war ebenso wie bei der Constantenbestimmung eine Schale angebracht. Die Belastung geschah durch vorsichtiges Zuschütten von Schrotkörnern in die Schale bis zum Eintritt des Bruches.

Im allgemeinen mussten viel mehr Versuche gemacht werden, um brauchbare Daten zu erhalten, als bei den vorhergehenden Beobachtungen, hauptsächlich deshalb, weil das Stäbchen recht oft in den Fassungen zerdreht wurde, und diese Versuche nicht in Rechnung zu ziehen waren. Der Bruch erfolgte in einer Fläche, die am Rande von einer Spirallinie begrenzt war, also eine schöne Uebereinstimmung mit der Theorie.

Die Dimensionen des Stäbchens wurden gerade so wie bei den Zerreißeversuchen ermittelt.

Die grösste Dilatation ebenso wie die grösste Spannung findet bei der Torsion eines elliptischen Cylinders am Ende der kleinen Axe der Querschnittsellipse statt. Dabei geschieht die erste in einer Richtung, die einen Winkel von  $45^\circ$  mit der Axe des Cylinders einschliesst. Da:

$$x_x = y_y = z_z = x_y = y_z = z_x = 0$$

ist, so ist der Ausdruck für das Maximum der Dilatation gegeben durch die Formel:

$$\lambda_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sqrt{y_z^2 + z_x^2},$$

was im Falle eines elliptischen Cylinders zu:

$$\lambda_{45^\circ} = \frac{N}{\mu a b^2 \pi}$$

wird.

Dabei bedeutet  $N$  das Drehungsmoment, und  $a, b, \mu$  haben die früheren Bedeutungen.

Ebenso, da die Spannung in einem beliebigen Punkte:

$$s_t = \frac{2\tau\mu}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$

ist, so ist das Maximum von  $s_t$ :

$$s_t = \frac{2N}{\pi ab^2}.$$

Aus den Versuchen erhalten wir Folgendes:

	$a$	$b$	$P$	$s_t$	$10^6 \lambda_{45^\circ}$		$a$	$b$	$P$	$s_t$	$10^6 \lambda_{45^\circ}$
1.	0,9281	0,9097	246	10173	1862	18.	1,0379	1,0199	399	10223	1873
2.	0,9140	0,9097	240	9966	1824	19.	1,0423	1,0271	402	10114	1851
4.	0,9363	0,9255	256	10135	1855	20.	1,1751	1,1525	571	10119	1852
5.	0,9148	0,8974	242	10146	1857	21.	1,1778	1,1496	539	9494	1737
6.	0,8985	0,8882	225	10124	1853	22.	1,1680	1,1445	552	9977	1826
7.	1,0420	1,0380	359	10152	1858	23.	1,1455	1,1338	531	9993	1830
8.	1,0613	1,0388	368	10235	1882	24.	1,1456	1,1180	519	10124	1834
9.	1,0542	1,0460	371	10239	1874	25.	1,1593	1,1226	529	10059	1841
10.	1,0608	1,0424	370	10195	1866	26.	1,1654	1,1297	540	10042	1838
11.	1,1399	1,1297	534	10152	1854	27.	1,1598	1,1302	538	10042	1838
12.	1,1343	1,1252	526	10180	1854	28.	1,0557	1,0159	399	10156	1851
13.	1,1353	1,1277	529	10135	1855	29.	1,0439	1,0210	396	10064	1842
14.	1,1307	1,1294	526	10086	1846	30.	0,8326	0,8094	199	10086	1846
15.	1,1441	1,1324	537	10119	1852	31.	0,8535	0,8096	207	10234	1873
16.	1,0377	1,0062	310	8163	1494	32.	0,8436	0,8067	203	10228	1872
17.	1,0355	1,0231	401	10234	1873	33.	0,8792	0,8576	231	10113	1851

Gesamtmittel  $\lambda_{45^\circ} = 0,001\ 837$

Wahrscheinlicher Fehler  $\pm 0,000\ 002$ .

#### 4) Combinirte Versuche von Zerreißen mit Zerbrechen.

Bei diesen Versuchen war die Torsionsrolle in der Mitte unten mit einem Haken versehen, an welchen eine Schale angehängt wurde. Es wurde eine gewisse Dehnung durch Auflegen von Gewichtsstücken auf die Zugschale hervorgebracht, und sodann das Stäbchen durch Zuschütten von Schrot in die Torsionsschale zerdreht. Bei der so hervorgebrachten Deformation haben wir für die Verrückungen die Ausdrücke:

$$u = \tau zy + \frac{C}{E} \alpha x, \quad v = -\tau zx + \frac{C}{E} \alpha y,$$

$$w = \tau \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + \frac{C}{E} z.$$

Das Minimum der Dilatation tritt also ein unter einem Winkel  $\vartheta$  zur  $z$ -Axe geneigt, wobei der Winkel  $\vartheta$  definiert ist durch:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{E}{1 - \alpha} \cdot \frac{N}{C} \cdot \frac{1}{\mu \pi ab^2},$$

wo  $N$  das Drehungsmoment, und  $C$  die Belastung pro Quadratmillimeter bedeuten.

Für die grösste Dilatation gibt daher die Formel:

$$\lambda_{\phi} = \frac{C}{E} (\alpha \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \frac{2N}{\mu \pi a b^2}.$$

Für die Spannung entsprechend die Formel:

$$s_{\phi} = \frac{G}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{4N^2}{(\pi a b^2)^2}}.$$

Wenn wir die Ergebnisse der Versuche zusammenstellen, so erhalten wir Folgendes:

	$a$	$b$	$P_z$	$P_t$	$\vartheta$	$s_{\phi}$	$10^6 \lambda_{\phi}$
1.	0,9352	0,9234	14515	146	29°31' 9"	8786	1504
2.	0,9141	0,9123	14058	142	29 59 55	9004	1582
3.	1,0950	0,9296	16308	196	39 40 6	9404	1650
4.	0,9596	0,9161	16358	143	28 5 45	8752	1501
5.	0,9314	0,9148	15225	141	28 51 50	8879	1499
6.	0,9382	0,9127	5048	202	40 50 50	9883	1696
7.	0,8109	0,7807	7420	157	38 22 10	9838	1780
8.	0,8471	0,8219	10574	128	33 3 30	9739	1553
9.	0,9284	0,9093	1035	229	44 12 45	9986	1723

Die Dilatation wächst mit dem Winkel, welchen die Richtung, in der die Dilatation geschieht, mit der  $z$ -Axe einschliesst.

##### 5) Festigkeit bei der Compression.

Dazu wurde ein sehr einfacher Apparat gebraucht. Er bestand aus einem eisernen Druckhebel, der sich an einem Ende um eine horizontale Axe bewegte und am anderen belastet werden konnte. Unter den Druckhebel wurde auf einer festen Unterlage ein kurzes Stäbchen von der Länge von 8 mm bis 10 mm aufgestellt und durch Belastung des einen Endes des Hebels zerdrückt. Damit bei diesem Verfahren die Vertheilung der Druckkräfte möglichst gleichmässig sei, hat man die beiden Enden der untersuchten Stäbchen zwischen zwei kleine Platten aus gut ausgeglühtem Kupfer gestellt. Es konnten indess von den vielen angestellten Versuchen nur wenige benutzt werden, denn sobald das Stäbchen ein klein wenig schief stand, so trat der Bruch viel zu früh ein, was man auch schon daraus merken konnte, dass in diesen Fällen das Stäbchen nicht parallel seiner Längsrichtung, wie es nach der Theorie sein muss, zerbrach. Die

Dimensionen der Stäbchen waren vorher gemessen, und der Hebel wurde vermittelst eines Zirkels ausgewerthet.

Bei diesen Versuchen findet die grösste Dilatation in der Richtung, welche senkrecht auf der  $z$ -Axe steht, statt. Es gilt dabei die Formel:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{C}{2\mu + 3\lambda}.$$

Die Ergebnisse der Versuche sind im Folgenden zusammengestellt, wobei  $e$  den Hebelarm bedeutet:

	$10^4 a$	$10^4 b$	$P$	$l$	$C$	$10^5 \lambda_x$		$10^4 a$	$10^4 b$	$P$	$l$	$C$	$10^5 \lambda_x$
1.	8761	8639	18080	4,9	37900	128	8.	8672	8573	21832	4,5	42063	142
2.	8587	8414	18740	4,5	37152	125	9.	8781	8564	17745	4,8	37556	126
3.	8494	8434	29440	3,5	4478	154	10.	8763	8644	17764	5,0	37225	126
4.	8493	8436	23728	3,5	36091	124	11.	8682	8563	19684	4,5	37926	128
5.	8677	8568	19160	4,5	36915	125	12.	8490	8438	24662	3,5	38422	129
6.	8673	8571	19972	4,5	38484	130	13.	8786	8645	17375	5,0	36407	123
7.	8679	8565	19358	4,5	37269	126	14.	8662	8596	16754	5,1	35856	121

Gesamtmittel  $\lambda_x = 0,00129$ .

Wahrscheinlicher Fehler  $\pm 0,00003$ .

### Resultate.

Wenn wir die Resultate der einzelnen Untersuchungen hier noch einmal zusammenstellen, so erhalten wir folgende Zahlen für den Druck pro qmm und die Grenzdilatation:

Einseitiger Zug	$C = 8767$	$\lambda_x = 0,00131$ ,
Biegung	$C = 8794$	$\lambda_x = 0,00132$ ,
Torsion	$C = 10142$	$\lambda_{45^\circ} = 0,00183$ ,
Zusammendrücken	$C = 37700$	$\lambda_x = 0,00129$ .

Wir sehen also zunächst, dass keine der beiden in der Einleitung dieser Arbeit erwähnen Hypothesen ohne weiteres anzunehmen ist.

Bei dem Zerreißen und Zerbiegen, wo die grösste Dilatation in der Richtung parallel der Längsaxe des Stäbchens geschieht, erreicht die Grenzdilatation denselben Werth, nämlich für die von uns untersuchte Sorte von Glas ist  $\lambda_x = 0,00131$ . Bei der Torsion dagegen, wo sie unter dem Winkel von  $45^\circ$  zu der  $z$ -Axe geschieht, ist sie von  $\lambda_x$  verschieden.

Ebenso verhält es sich bei den combinirten Fällen von Drillung und Zug, wo auch die grösste Dilatation in einer Richtung geschieht, welche einen Winkel  $0 < \vartheta < \pi/4$  mit der



$z$ -Axe einschliesst. Dabei bemerken wir, dass die grösste Dilatation mit wachsendem  $\vartheta$  wächst und den grössten Werth für  $\vartheta = 45^\circ$  besitzt. Bei dem Zusammendrücken ergibt sich für  $\lambda_z$  ein Werth, der auch nahe dem Werthe von  $\lambda_x$  liegt.

Man könnte denken, dass die Ursache dieses merkwürdigen Verhaltens sich auf eine krystallinische Structur zurückführen lässt. In der That könnte man annehmen, dass das Glasstäbchen als Krystall vom hexagonalen System zu betrachten wäre. Wir werden im Folgenden sehen, dass die Annahme uns keine Erklärung gibt.

Die Elasticität eines Krystalls vom hexagonalen System hängt von fünf Constanten ab. Wir wollen in Folgendem nach Prof. W. Voigt<sup>1)</sup> mit  $u$  die Determinante:

$$u = \begin{vmatrix} A & D & B & 0 & 0 & 0 \\ D & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A \cdot D}{2} \end{vmatrix}$$

bezeichnen und mit  $s_{kh}$  den Coefficienten des  $k$ ten Elementes der  $h$ ten Reihe der Determinante  $u$ .

Nun wollen wir den einseitigen Zug betrachten. Es ergibt sich dabei, dass der Werth für die grösste Dilatation, welche parallel der  $z$ -Axe stattfindet, gegeben ist durch die Formel<sup>2)</sup>:

$$\lambda_z = I_1 s_{33}.$$

Von derselben Constante hängt aber auch die Biegung ab, und sie ist bei meiner Biegungsconstantenbestimmung direct beobachtet  $s_{33} = 1/E$ , also ist die Berechnung von  $\lambda_z$  frei von jeder Hypothese über die Isotropie des Glases.

Bei der Torsion eines hexagonalen Krystalls erhalten wir für die Dilatation  $\lambda_t$  in einer beliebigen Richtung, bei Zugrundelegung der Formel (54) des I. c.:

$$\lambda_t = 2N_1 \left( \frac{x\beta}{a^4} - \frac{y\alpha}{b^4} \right) s_{44}.$$

Die Constante  $s_{44}$  ist aber diejenige, von welcher die

1) W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 275. 1882.

2) W. Voigt, Elasticitätsverhältnisse der Krystalle p. 66.

Drillung um die Längsaxe des Stäbchens abhängt. Wir haben sie also ebenfalls bei der Bestimmung des Torsionscoëfficienten direct beobachtet, sie ist nämlich  $s_{44} = 1/T$ . Hier ist also die Berechnung von  $\lambda_{45}$  auch frei von jeder Hypothese über die Isotropie des Stäbchens.

Anders verhält sich die Sache bei dem Zusammendrücken. Die Dilatation bei der Compression des hexagonalen Krystalls ist gegeben durch<sup>1)</sup>:

$$\lambda_z = \Gamma_1 s_{13},$$

wo  $s_{13}$  eine neue unabhängige Constante ist. Also die Annahme einer krystallinischen Structur könnte uns nur Aufklärung über gewisse Merkwürdigkeiten, welche bei der Compression eintreten, geben.

Die Versuche aber mit letzterer, abgesehen von der grossen Ungenauigkeit, ergeben uns einen Mittelwerth für die Grenzdilatation, der nahezu gleich  $= \lambda_z$  ist. Der Hauptwiderspruch mit der Hypothese, dass der Bruch bei einer constanten Grenzdilatation eintritt, liegt indessen in dem grossen Unterschiede von  $\lambda_z$  und  $\lambda_{45}$ .

### III. Beiträge zur Hydrodynamik; von Eduard Riecke.

(Aus den Göttinger Nachr. vom 3. Oct. 1888; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. VI Fig. 1–12.)

In den beiden ersten Abschnitten der folgenden Mittheilung werden einige Probleme der Hydrodynamik, welche in den gewöhnlichen Darstellungen nur andeutungsweise behandelt werden, im wesentlichen auf dem Wege graphischer Darstellung weiter verfolgt. Dieselben beziehen sich auf die gleichförmige Bewegung einer Kugel durch eine ruhende Flüssigkeit und auf das Fortschreiten zweier paralleler Wirbelfäden in einer solchen, beziehungsweise eines einzigen Fadens längs einer festen Wand. In beiden Fällen besteht die Aufgabe darin, die Bewegungen der einzelnen Flüssigkeits-

1) W. Voigt, l. c. p. 66.

theilchen zu bestimmen, welche durch die genannten Vorgänge veranlasst werden. Der dritte Abschnitt enthält die Resultate einer experimentellen Untersuchung, welche Hr. Dr. Krüger auf meine Veranlassung hin unternommen hat, und welche geeignet erscheint, auf den Vorgang der Strahl- und Wirbelbildung einiges Licht zu werfen.

#### I. Bewegung einer Kugel durch eine ruhende Flüssigkeit.

1. Wir betrachten zuerst den Fall, dass in einer unbegrenzten Flüssigkeit eine einzige Quelle vorhanden ist, von welcher aus dieselbe nach allen Seiten hin ins Unendliche abströmt. Das Geschwindigkeitspotential ist  $\varphi = -e/r$ . Von dem Quellpunkt aus ziehen wir eine Linie, welche wir zu der Axe eines Polarcoordinatensystemes machen; wir beschreiben um die Quelle eine Kugel, auf welcher ein Parallelkreis bestimmt wird durch seine Poldistanz  $\vartheta$ , den Winkel, welchen ein nach einem beliebigen Punkt des Kreises gezogener Radius mit der Axe einschliesst. Die Flüssigkeitsmenge, welche in der Zeiteinheit durch eine von dem Parallelkreis  $\vartheta$  begrenzte Kugelzone hindurch geht, ist gleich  $2\pi e(1 - \cos \vartheta)$ . Wir setzen dieselbe gleich  $4\pi\psi$  und erhalten zur Berechnung von  $\psi$  die Formel  $\psi = e/2r(1 - \cos \vartheta)$ . Für  $\vartheta=0$  ist  $\psi=0$ ; für  $\vartheta=\pi$  ist  $\psi=e$ . Die Werthe von  $\vartheta$ , für welche  $\psi$  der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 ... annimmt, sind durch eine einfache Construction zu finden. Wir nennen  $\psi$  die Strömungsfunktion.

2. Auf einer und derselben Axe  $x$  liegen beliebig viele Quellen oder Senken der Flüssigkeit; das Geschwindigkeitspotential ist gegeben durch:

$$\varphi = -\frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2} - \frac{e_3}{r_3} - \dots$$

Sind  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  die in den einzelnen Quellen entsprechenden Strömungsfunktionen, so ist die bei gleichzeitigem Bestehen sämtlicher Quellen auftretende Strömungsfunktion:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots$$

Dieselbe entsteht durch Superposition aus den Strömungsfunktionen der einzelnen Quellen. Bezeichnen wir durch  $\rho$  die Entfernung eines beliebigen Punktes von der  $x$ -Axe, so

ergeben sich die Strömungsgeschwindigkeiten in der Richtung der letzteren Axe und senkrecht zu derselben mit Hülfe der Formeln:

$$u = \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}, \quad \omega = - \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Die Flächen constanten Potentials sind Rotationsflächen, deren Figurenaxe durch die Linie der Quellen und Senken gegeben ist. Sie werden senkrecht durchschnitten von den Flächen, welche durch Umdrehung der Strömungslinien  $\psi$  um die  $x$ -Axe erzeugt werden. Wir bezeichnen diese Flächen als Strömungsflächen. Zwei benachbarte unter denselben, welche durch die Werthe  $\psi$  und  $\psi + d\psi$  bestimmt sein mögen, begrenzen auf einer Fläche constanten Potentials einen Ring. Ist  $dm$  die Breite desselben, so ist die in der Zeiteinheit durch ihn gehende Flüssigkeitsmenge gegeben durch:

$$2\pi\varrho dm \sqrt{u^2 + \omega^2} = 4\pi dm \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2} = 4\pi d\psi.$$

Bezeichnen wir dasjenige Flächenstück, welches auf einer Potentialfläche durch die Strömungsfläche  $\psi$  ausgeschnitten wird, als den Querschnitt der letzteren, so ergibt sich der Satz: *Die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt der Strömungsfläche  $\psi$  gehende Flüssigkeitsmenge ist gleich  $4\pi\psi$ .*

3. Es liegt eine Quelle der Flüssigkeit auf dem negativen Zweige der  $x$ -Axe in unendlicher Entfernung; für diese ist:

$$\varphi = cx \quad \text{und} \quad \psi = \frac{c}{4} \varrho^2.$$

4. Eine auf der  $x$ -Axe liegende Quelle vereinigt sich mit einer ebenfalls auf der  $x$ -Axe liegenden und gleich mächtigen Senke zu einem Doppelpunkt. Für diesen ist:

$$\varphi = \frac{2eax}{r^3}, \quad \psi = -\frac{ea\varrho^2}{r^3},$$

oder mit Benutzung der Polarcoordinaten  $r$  und  $\vartheta$ :

$$\varphi = \frac{2ea \cos \vartheta}{r^2} \quad \text{und} \quad \psi = -\frac{ea \sin^2 \vartheta}{r}.$$

Hier bezeichnet  $a$  die halbe Entfernung von Quelle und Senke,  $2ea$  das Moment des Doppelpunktes.

Die Curven  $\psi = \text{Const.}$  sind untereinander ähnlich; sie

sind für  $\psi = 1, 2, 3, \dots 8$  auf Fig. 1 punktirt gezeichnet, wobei  $ea = 30$  gesetzt ist.

5. In einer Flüssigkeit, welche in der Richtung der  $x$ -Axe mit der constanten Geschwindigkeit  $c$  sich bewegt, befinde sich ein Doppelpunkt, dessen Axe mit der  $x$ -Axe zusammenfällt. Das Geschwindigkeitspotential ist:

$$\varphi = \left( c + \frac{2ea}{r^3} \right) x.$$

Die Strömungsfunktion:

$$\psi = \left( \frac{c}{4} - \frac{ea}{r^3} \right) \varrho^2.$$

Die Strömungslinien für die Werthe  $\psi = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60$  sind in der Fig. I durch gestrichelte Curven dargestellt. Die Strömungslinie  $\psi = 0$  besteht aus der  $x$ -Axe und aus dem Kreise, dessen Mittelpunkt in dem Doppelpunkt liegt, dessen Radius gleich  $\sqrt[3]{4ea/c}$  ist, die entsprechende Strömungsfläche aus der  $x$ -Axe und aus der durch Umdrehung jenes Kreises um dieselbe erzeugten Kugel. Die Bewegung der ausserhalb dieser Kugel befindlichen Flüssigkeit wird in keiner Weise geändert werden, wenn wir das Innere der Kugel erfüllen mit irgend einer festen Substanz. Es gibt somit unsere Zeichnung ein Bild von der Strömung, welche in einem gleichmässigen Strome durch das Einsenken einer festen Kugel hervorgebracht wird.

6. Für die Beurtheilung der Strömungsverhältnisse ist es von Wichtigkeit, zu wissen, wie ein bestimmter Flüssigkeitsfaden durch die mit verschiedener Geschwindigkeit erfolgende Strömung seiner einzelnen Theilchen im Laufe der Zeit deformirt wird. Unsere Zeichnung gibt die Gestalt desjenigen Flüssigkeitsfadens, welcher zu irgend einer Zeit mit einem zur  $x$ -Axe senkrechten Kugeldurchmesser zusammenfällt, von Secunde zu Secunde durch schwach ausgezogene Linien an.

7. Ertheilt man dem ganzen im Vorhergehenden betrachteten System eine Geschwindigkeit  $c$  in einem der Strömung der Flüssigkeit entgegengesetzten Sinne, so kommt die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe, während die Kugel mit der Geschwindigkeit  $c$  durch dieselbe fortschreitet. Die Bewegungen, welche dabei von den einzelnen Flüssigkeits-

theilchen ausgeführt werden, ergeben sich mit Hülfe der im vorhergehenden Abschnitt besprochenen Verschiebungscurven. Diese geben nämlich durch ihren Schnitt mit den Strömungslinien die Punkte an, nach welchen die zu Anfang in einem äquatorialen Durchmesser befindlichen Flüssigkeitstheilchen nach 1, 2, 3 ... Secunden gelangen, unter der Voraussetzung, dass die Kugel ruht, und die Flüssigkeit im Unendlichen mit der Geschwindigkeit  $c$  strömt. Bewegt sich nun das ganze System mit der Geschwindigkeit  $c$  rückwärts, so werden jene Theilchen von den gefundenen Punkten aus in 1 Secunde um die Strecke  $c$ , in 2 Secunden um  $2c$ , in 3 Secunden um  $3c$  rückwärts getragen werden. So ergeben sich also die Punkte, nach welchen bei ruhender Flüssigkeit und bewegter Kugel diejenigen Theilchen, welche zu derselben Zeit in einem äquatorialen Durchmesser der bewegten Kugel sich befanden; nach 1, 2, 3 Secunden gelangen. Die so construirten Curven, welche die Bewegung der Theilchen einer Flüssigkeit darstellen, durch welche eine feste Kugel geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitet, sind in Fig. 1 stark ausgezogen.

Die Bewegung besitzt den Charakter einer Wellenbewegung; die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen sind aber nicht geschlossen, sondern dieselben bestehen in Schleifen, deren Ebene durch die von dem Mittelpunkt der Kugel durchlaufene Axe hindurchgeht; der Endpunkt der Schleife ist gegen den Anfangspunkt verschoben in der Bewegungsrichtung der Kugel. Die Grösse der Verschiebung nimmt sehr schnell ab mit der Entfernung, sodass die Bahnen in einiger Entfernung von der Kugel als nahezu geschlossene erscheinen. Kleiner, aber immerhin noch bedeutend, ist die Abnahme, welche die Amplitude der Bahnen mit der Entfernung von der Kugel erleidet.

## II. Zwei geradlinige parallele Wirbelfäden in einer ruhenden Flüssigkeit.

8. Wir nehmen zuerst an, die beiden Wirbelfäden besitzen eine im Raume unveränderliche Lage. Legen wir eine beliebige Ebene senkrecht zu denselben, und machen wir diese zu der  $xy$ -Ebene eines rechtwinkligen Coordinaten-

systems, so hängen die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit nur ab von  $x$  und  $y$ , die Bewegung ist in allen zu der  $xy$ -Ebene parallelen Ebenen dieselbe. Bezeichnen wir durch  $r_1$  und  $r_2$  die Entfernungen eines beliebigen Punktes von den Schwerpunkten der beiden Wirbelfäden, so wird die Strömungsfuction gegeben durch den Ausdruck:

$$W = -\frac{m}{\pi} \log \frac{r_1}{r_2}.$$

Die Strömungslinien sind gegeben durch:

$$\frac{r_1}{r_2} = e^{-\frac{\pi W}{m}}.$$

Dieselben sind Kreise, welche das System der durch die Schwerpunkte gehenden Kreise senkrecht durchschneiden. Durch den Querschnitt eines Ringes, welcher zwischen zwei Strömungslinien, beziehungsweise den ihnen entsprechenden Strömungsflächen enthalten und dessen Höhe gleich der Längeneinheit ist, fließt in der Zeiteinheit eine Flüssigkeitsmenge, welche gegeben ist durch die Differenz der den Grenzflächen entsprechenden Werthe von  $W$ .

9. Wir legen das Coordinatensystem  $xy$  so, dass der Mittelpunkt desselben mit der Mitte der Centrallinie der beiden Wirbel zusammenfällt; die  $x$ -Axe nehmen wir so, dass ihre positive Richtung von dem Wirbel 2 zu dem Wirbel 1 geht. Die Entfernung der Wirbelcentren sei  $2a$ . Die Geschwindigkeit derjenigen Flüssigkeitstheilchen, welche sich gerade in der Mitte zwischen den beiden Wirbelfäden befinden, ist dann gegeben durch  $v = -2m/\pi a$ . Wären die beiden Wirbel frei in der Flüssigkeit, so würden sie nicht in Ruhe an derselben Stelle verbleiben können, vielmehr würde jeder derselben diejenige Geschwindigkeit annehmen, welche dem von dem anderen herrührenden Impulse entspricht, d. h. es würden beide Wirbel in der Richtung der  $y$ -Axe fortschreiten mit der Geschwindigkeit  $-m/2\pi a$ . Man kann in diesem Falle die Wirbel zu feststehenden machen, wenn man der ganzen Flüssigkeit eine Bewegung im Sinne der positiven  $x$ -Axe mit der Geschwindigkeit  $m/2\pi a$  ertheilt. Die wirkliche Bewegung der Flüssigkeit wird sich dann



ergeben durch Superposition der letzteren Geschwindigkeit mit der von den feststehenden Wirbeln erzeugten. Für diese haben wir im Vorhergehenden die Strömungsfunktion in der Form  $-(m/\pi) \log r_1/r_2$  gegeben; für die erstere würde die Strömungsfunktion durch  $-(m/2\pi a)x$  darzustellen sein. Die Strömungsfunktion der resultirenden Bewegung ist somit:

$$\mathfrak{B} = -\frac{m}{\pi} \log \frac{r_1}{r_2} - \frac{m}{2\pi a} x.$$

Setzen wir  $(m/\pi) = 0,8$  und  $a = 2$ , so werden die Wirbel den in der Mitte zwischen denselben liegenden Flüssigkeitstheilchen eine Geschwindigkeit 0,8 in der Richtung der negativen  $y$ -Axe ertheilen. Gleichzeitig wird die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit in der Richtung der positiven  $y$ -Axe strömt, gleich 0,2. Unter Zugrundelegung dieser Annahmen sind die Strömungscurven, für welche  $\mathfrak{B}$  die Werthe:

0	0,1	0,2	0,3 . . .	0,9	1	1,5	2	3
	-0,1	-0,2	-0,3 . . .	-0,9	-1		-2	

annimmt, in Fig. 2 gezeichnet. Die ganze Bewegung ist symmetrisch gegen die  $y$ -Axe; aus diesem Grunde ist die Zeichnung beschränkt auf die dem positiven Zweige der  $x$ -Axe entsprechende Halbebene. Die positive  $y$ -Axe, und somit auch die Strömung der Flüssigkeit ist nach unten gerichtet. Die Flüssigkeit wird durch die dem Werth  $\mathfrak{B} = 0$  entsprechende Strömungsfläche in zwei Theile von verschiedenem Bewegungscharakter zerlegt. Innerhalb der Fläche  $\mathfrak{B} = 0$  besteht die Bewegung in einer Circulation der Flüssigkeitstheilchen um die Wirbelfäden herum; diese findet in der gezeichneten Halbebene im Sinne einer Drehung von der  $x$ -Axe zur  $y$ -Axe statt. Die Fläche  $\mathfrak{B} = 0$  umschliesst einen stets von denselben materiellen Elementen gebildeten Theil der Flüssigkeit, welchen wir als den Wirbelkörper bezeichnen wollen. Ausserhalb der Fläche  $\mathfrak{B} = 0$  besteht die Bewegung in einer einfachen Strömung, welche durch die Existenz des Wirbelkörpers in derselben Weise gestört wird, wie durch das Vorhandensein eines festen Körpers. Die Deformation, welche ein der äusseren Flüssigkeit angehörender Flüssigkeitsfaden erleidet, welcher zu irgend einer Zeit mit der

$x$ -Axe zusammenfällt, ist in der Zeichnung durch die gestrichelten Linien für die Zeiten von 10, 20 . . . 60 Secunden dargestellt. Im Innern des Wirbelkörpers sind auf den Circulationslinien  $\mathfrak{B} = 0 - 0,1 - 0,5 - 1$  die Punkte markirt, in welchen sich nach einer bis fünf Secunden die Flüssigkeitstheilchen befinden, welche zu Anfang auf dem inneren Stück der  $x$ -Axe lagen.

10. Wir haben im Vorhergehenden die Wirbelfäden zu stehenden gemacht dadurch, dass wir der Flüssigkeit die Geschwindigkeit  $m/2\pi a$  in der Richtung der  $y$ -Axe ertheilten. Die unter diesen Umständen auftretenden Strömungsverhältnisse sind in Fig. 2 dargestellt. Verschieben wir nun das ganze System mit der Geschwindigkeit  $m/2\pi a$  im Sinne der negativen  $y$ -Axe, so wird dadurch die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe gebracht. Der Wirbelkörper dagegen, welcher unter den früheren Verhältnissen eine unveränderliche Lage im Raume bewahrte, wird sich jetzt mit der Geschwindigkeit  $m/2\pi a$  in der Richtung der negativen  $y$ -Axe bewegen. Er wird aber nach wie vor stets aus denselben Flüssigkeitstheilchen bestehen, und diese werden in derselben Weise wie früher um die Wirbelfäden circuliren.

*Die Bewegung, welche in der ruhenden Flüssigkeit, durch das Fortschreiten des Wirbelkörpers erzeugt wird, ist vollkommen dieselbe, wie die durch das Fortschreiten eines festen Körpers erzeugte.* Die Curven, in welchen die Flüssigkeitstheilchen dem vorübergehenden Wirbelkörper ausweichen, sind in Fig. 2 gezeichnet. Für die Dimensionen des Wirbelkörpers ergibt sich ein Anhaltspunkt daraus, dass in dem Schnittpunkt der Curve  $\mathfrak{B} = 0$  mit der  $y$ -Axe  $v = 0$  sein muss; es zeigt sich, dass dieser Schnittpunkt mit den beiden Wirbelcentren ein gleichseitiges Dreieck bildet. Der mit der Centrallinie der beiden Wirbel zusammenfallende Durchmesser des Wirbelkörpers ist nahezu gleich  $4,4a$ .

11. Der Flüssigkeitsfaden, welcher zu irgend einer Zeit mit dem zwischen den beiden Wirbelfäden liegenden Stücke der  $x$ -Axe zusammenfällt, wird durch die in dem Wirbelkörper vorhandene Circulation deformirt. Gleichzeitig nimmt derselbe an der Bewegung des ganzen Wirbelkörpers Theil

wird also in der Richtung der negativen  $y$ -Axe verschoben mit der Geschwindigkeit  $m/2\pi a$ . Die Gestalten, welche der betrachtete Faden nach der Zeit von 1, 2 . . 5 Secunden annimmt, sind in Fig. 3 gezeichnet. Als Querschnitt der Wirbelfäden sind dabei die Curven angenommen, für welche  $\mathfrak{B}$  den Werth  $-2$  hat. Die Verschiebungen in der Richtung der  $y$ -Axe sind zehnmal vergrößert, um ein störendes Ueberschneiden der einzelnen Curven zu vermeiden. Für die Secunden 1 und 2 sind die letzteren gezeichnet bis zu dem Querschnitt der Wirbelfäden; für die Secunde 3 ist die Curve bei dem auf  $\mathfrak{B} = -1,5$ , für die Secunden 4 und 5 bei dem auf  $\mathfrak{B} = -1$  circulirenden Theilchen abgebrochen. Die Curven sind im wesentlichen identisch mit denjenigen, welche man bei der von Reusch angewandten Erzeugungsweise der Wirbel beobachtet, und welche von ihm zuerst beschrieben worden sind.<sup>1)</sup> Die Dilatationen des deformirten Flüssigkeitsfadens sind dadurch anschaulich gemacht, dass die Positionen derjenigen Flüssigkeitstheilchen, welche auf den Curven  $\mathfrak{B} = -0,5 - 1,0 - 1,5 - 2$  sich bewegen, und welche sich zu Anfang in der  $x$ -Axe befanden, von Secunde zu Secunde angegeben sind. Das der Curve  $\mathfrak{B} = -2$  angehörnde Theilchen, dessen Lagen nur für die beiden ersten Secunden angegeben sind, würde in drei Secunden den Wirbelfaden beinahe fünfmal umlaufen; ebenso oft würde sich in dieser Zeit der Flüssigkeitsfaden um den Wirbelfaden herumschlingen; in fünf Secunden würde die Zahl der Umschlingungen auf acht anwachsen.

12. Die ganze Bewegung der Flüssigkeit ist symmetrisch zu der Ebene, welche durch die  $y$ -Axe senkrecht zu der  $xy$ -Ebene hindurchgeht. Man kann diese Ebene als eine feste Wand in die Flüssigkeit einführen, ohne dass in den Verhältnissen der Bewegung etwas geändert wird. Unsere Zeichnung stellt also auch die Bewegung einer Flüssigkeit dar, welche einerseits durch eine feste Wand begrenzt wird, und in welcher ein dieser Wand paralleler Wirbelfaden fortschreitet. Der Faden umgibt sich wieder mit einem

1) Reusch, Acad. Progr. Tübingen 1860.

Wirbelkörper, welcher jetzt auf der einen Seite durch die feste Wand begrenzt wird; dieser Wirbelkörper schreitet wieder in der Richtung der negativen  $y$ -Axe mit der Geschwindigkeit  $m/2\pi a$  fort.

13. Von den Resultaten, zu welchen die vorhergehenden Betrachtungen geführt haben, dürfte eines eine allgemeinere Bedeutung besitzen. Wir haben gefunden, dass der Wirbelfaden umgeben ist von einer in Circulation begriffenen Flüssigkeitsmasse, welche an der Bewegung des Fadens unabhängig von der übrigen Flüssigkeit theilnimmt, und welche wir als den Wirbelkörper bezeichnet haben. *Ein solcher Wirbelkörper wird immer auftreten, wenn in einer Flüssigkeit eine Wirbellinie vorhanden ist, welches auch die Gestalt derselben sei. Sind in der Flüssigkeit gleichzeitig mehrere Wirbellinien vorhanden, so werden sie von einem gemeinsamen Wirbelkörper umgeben sein.* Dieser Körper wird sich in der Flüssigkeit bewegen infolge der Bewegung der in ihm enthaltenen Wirbelfäden, gleichzeitig wird aber auch seine Gestalt sich ändern, entsprechend der Aenderung, welche in der relativen Lage der Wirbelfäden eintritt. Sind beispielsweise zwei kreisförmige Wirbel mit gemeinsamer Axe und gleicher Rotationsrichtung gegeben, so wird die Oberfläche des sie umschliessenden Wirbelkörpers periodische Pulsationen machen entsprechend dem periodisch sich wiederholenden Durcheinanderschlüpfen der Wirbelringe. Sind die Entfernungen der Wirbelfäden oder einzelner Gruppen derselben unendlich gross gegenüber den Dimensionen der Ringe oder Ringgruppen, so zerfällt der Wirbelkörper in mehrere Theile. Diese getrennten Wirbelkörper bewegen sich in der Flüssigkeit voneinander unabhängig, bis sie zusammenstossen, d. h. bis sie in Entfernungen gelangen, welche ihren Dimensionen gegenüber nicht mehr unendlich gross sind. Beim Zusammenstossen vereinigen sich die vorher getrennten Wirbelkörper zu einem einzigen, dessen Stabilität oder Instabilität von den Bewegungsverhältnissen der zusammenstossenden Wirbel abhängig ist.

## III. Beobachtungen über Strahl- und Wirbelbildung.

14. Zu diesen Beobachtungen, für deren Ausführung ich Hrn. Dr. Krüger zu grossem Danke verpflichtet bin, diente eine quadratische Hohlplatte von 75,5 mm Seitenlänge und 6,4 mm Höhe. Dieselbe war durch Einlassen zweier Glasplatten in die ausgekehlten Seiten eines quadratischen Rahmens hergestellt, welcher aus einer 10 mm dicken Messingplatte ausgeschnitten worden war. An zwei gegenüberliegenden Ecken des Quadrates war der Rahmen in der Richtung der Diagonale durchbrochen von Canälen von 6,4 mm Höhe und 3 mm Breite; die Verbindung mit den Flüssigkeitsbehältern wurde durch Schlauchansätze vermittelt, von gleichem Querschnitt und gleicher Richtung mit den Canälen. Bei den Beobachtungen wurde die Hohlplatte eingeschaltet in ein System von Röhren, welche die beiden Wasserreservoir  $R$  und  $R_1$  heberartig miteinander verbanden. War das ganze System mit Wasser gefüllt, so floss dieses durch die Platte unter einem Drucke, welcher durch die Niveaudifferenz der Behälter  $R$  und  $R_1$  gemessen wurde.

Die Constanz dieser Niveaudifferenz wurde durch folgende Einrichtung erhalten. (Fig. 4.) Das eine Reservoir  $R_1$  bestand aus einem cylindrischen Gefässe von dünnem Zinkblech, welches von einer luftdicht verlötheten cylindrischen Büchse  $B$  getragen wurde. Diese Büchse war durch vier rechtwinkelig gebogene Träger mit einer Bleiplatte verbunden, sodass die ganze Vorrichtung in dem grösseren mit Wasser gefüllten Reservoir  $R$  in stabilem Gleichgewichte schwamm. Wurde nun das Gefäss  $R_1$  mit Wasser bis zum Rande gefüllt, so bestand zwischen den Reservoiren  $R$  und  $R_1$  eine Niveaudifferenz von 40 mm. Wurden durch einen Heber die beiden Reservoirs miteinander verbunden, so strömte das Wasser von  $R_1$  nach  $R$ , gleichzeitig hob sich aber der Schwimmer infolge des verminderten Gewichtes, sodass der Niveauunterschied constant blieb. Verschieden grosse Niveauunterschiede wurden durch geeignete Belastung des Schwimmers hergestellt. Der Niveauunterschied wurde mit einem Kathetometer gemessen, an dessen Schlitten in passendem Abstand zwei in Spitzen endigende vertical nach unten

gehende Metallstäbe angebracht waren. Die Spitze des einen wurde auf das Niveau in  $R$ , hierauf die Spitze des anderen auf das Niveau in  $R_1$  eingestellt und beidemale die Stellung des mit dem Schlitten verbundenen Nonius an der Theilung abgelesen. Der Verticalabstand der Spitzen selbst wurde dadurch bestimmt, dass beide Spitzen nach einander auf dasselbe Niveau eingestellt wurden.

15. Mit den geschilderten Mitteln konnte die Strömung des Wassers durch unsere Platte bei verschiedenen Drucken beobachtet werden. Um die Strömungscurven zur Anschauung zu bringen, wurden auf den Grund der Platte an geeigneten Stellen Fuchsinkristalle geklebt, welche bei eingeleiteter Strömung den Ausgangspunkt gefärbter Flüssigkeitsfäden bildeten. Diese wurden auf einer hinreichend durchsichtigen Tafel matten Glases, welche auf die Deckplatte der durchströmten Kammer gelegt wurde, nachgezeichnet und von dieser auf das Papier übertragen. Auf diese Weise sind die Figuren 5 bis 12 entstanden. Sie geben ein Bild der Strömung für Niveaudifferenzen, welche von 2,03 mm bis 16,50 mm wachsen. Bei dem sehr kleinen Druck von 2,0 mm strömt das Wasser durch die Platte in denselben Curven wie der galvanische Strom. Schon bei einem Druck bei 3 mm sind aber zwei zu beiden Seiten der Eintrittsstelle sich bildende Wirbel zu bemerken, welche sich bei wachsendem Drucke mehr und mehr ausbreiten. Bei einem Drucke von 16,5 mm erfüllen sie beinahe ganz die beiden Hälften des quadratischen Raumes; der zwischen den Wirbeln bleibende Canal wird von einem Strahle ausgefüllt, welcher von der Eintritts- nach der Austrittsstelle hin sich etwas verbreitert, vor der Austrittsstelle selbst eine kleine Ausbuchtung zeigt.

16. Auf den engen Zusammenhang, welcher zwischen Strahlbildung und Wirbelbewegung besteht, hat zuerst Hr. v. Helmholtz aufmerksam gemacht.<sup>1)</sup> Mit Bezug auf seine Bemerkungen möge hier noch eine Beobachtung erwähnt werden, welche mit dem von Reusch angegebenen Apparate

1) v. Helmholtz, Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. Wissenschaftl. Abhandl. 1. p. 146.

angestellt worden ist. Lässt man in dem mit reinem Wasser gefüllten Gefässe einen Strahl gefärbter Flüssigkeit ganz langsam sich erheben, so bemerkt man, wie an diesem in gewissen Intervallen Anschwellungen sich bilden. An der Peripherie derselben entstehen Wirbellinien, welche eine Auflösung des ganzen Strahles in eine Folge kreisförmiger Wirbel herbeiführen. Die gemeinsame Axe dieser Wirbel ist durch die Axe des früheren Strahles gegeben. Häufig beobachtet man weiterhin in sehr schöner Weise das von Hrn. v. Helmholtz zuerst beschriebene Durcheinanderschlüpfen der Ringe.

#### IV. *Das Gesetz der molecularen Attraction;* *von Piers Bohl.*

In der folgenden Abhandlung wird das Gesetz der molecularen Anziehung auf Grund experimenteller Ergebnisse festgestellt. Der Weg, den ich zur Lösung dieses — meines Wissens hier zum ersten mal behandelten — Problems eingeschlagen habe, ist der folgende. Zunächst ertheile ich der Zustandsgleichung für Gase eine bestimmtere Gestalt, insofern nur noch eine Function einer Variablen vorläufig unbekannt bleibt. Da natürlich die Attraction der Molecüle mit in Betracht gezogen wird, so gibt die erhaltene Gleichung ein Mittel, das Gesetz der Anziehung zu bestimmen.

Die genannte speciellere Fassung der Zustandsgleichung bildet meinen Ausgangspunkt; ich habe es daher für gut gehalten, sie auf zwei voneinander unabhängigen Wegen herzuleiten, von denen der eine auf kinetischen, der andere auf thermodynamischen Betrachtungen beruht. Das Resultat meiner Arbeit — das ich hier gleich anfangs erwähne — besteht in dem Nachweis, dass auch die kleinsten Massentheile sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen.

1. Nimmt man in der Gastheorie das Schema materieller Punkte ohne wechselseitige Anziehung an, so führt dasselbe zu dem Gay-Lussac'schen Gesetz. Eine weitere Annäherung an das thatsächliche Verhalten der Gase wird erhalten,



wenn man die Attraction der Molecüle mit in Betracht zieht. Ich setze die Anziehung proportional mit  $(m_1 \cdot m_2)/r^n$ , wobei  $m$  die Masse,  $r$  die Entfernung zweier Molecüle bedeutet.

Falls das Attractionsgesetz nicht unter diese Form fällt, so soll dieses das Hauptglied sein. Der Verlauf unserer Untersuchung wird darüber Aufschluss geben, ob ein weiteres Glied sich nachweisen lässt.

Die Gleichungen, denen gemäss die Bewegungen der Gasteilchen geschehen, sind nach dem Typus zu bilden:

$$(1) \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = m_1 \sum \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^{n+1}} + m_2 \sum \frac{x_e - x_i}{r_{ei}^{n+1}} \text{ etc.}$$

Dieselben entsprechen, wie man sieht, einem Gasgemisch, welches Molecüle von der Masse  $m_1, m_2$ , etc. enthält. Auch die Druckkräfte sollen dabei berücksichtigt sein, insofern wir die Wände offenbar als zum ganzen System gehörig betrachten dürfen. Dadurch vereinfachen wir die Untersuchung; wir können aber auch die Druckkräfte gesondert in die Gleichung (1) einführen und kommen dann natürlich zu denselben Ergebnissen.

Sind  $x_i = x_i(t)$  etc. Integrale der Gl. (1), so sind auch unter der Bedingung:

$$(2) \quad \alpha^{n+1} \beta^2 = \mu,$$

die Grössen  $\xi_i = \alpha \cdot x_i(\beta t)$  etc. Integrale der Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \mu \cdot m_1 \sum \frac{\xi_k - \xi_i}{\varrho_{ik}^{n+1}} + \mu \cdot m_2 \sum \frac{\xi_e - \xi_i}{\varrho_{ei}^{n+1}} \text{ etc.}$$

Stellen die Gleichungen  $x_i = x_i(t)$  etc. die moleculare Bewegung eines im Gleichgewicht befindlichen Gases dar, so bestimmen die Gl.  $\xi_i = \xi_i(t)$  etc. — wenigstens unter der hier zunächst gemachten Voraussetzung, die Molecüle seien einfache materielle Punkte — ebenfalls eine solche Bewegung. Stets ist dabei die Configuration des zweiten fingierten Gases zur Zeit  $t$ , der des ersten zur Zeit  $\beta \cdot t$  ähnlich, wobei alle Strecken  $\alpha$  mal vergrössert sind. Das erste Gas enthält Molecüle von der Masse  $m_1, m_2$  etc., das zweite von der Masse  $\mu \cdot m_1, \mu \cdot m_2$  etc.; das zweite nimmt einen  $\alpha^3$  mal grösseren Raum ein, als das erste. Entsprechende Geschwindigkeiten verhalten sich wie  $\alpha \cdot \beta$  zu 1. Da im zweiten Falle

alle Entfernungen  $\alpha$  mal grösser sind, so ist der Druck auf entsprechende Theile der Umgebung  $\mu^2/\alpha_n$  mal grösser oder der Druck auf die Flächenheit  $\mu^2/\alpha^{n+2}$  mal grösser, als im ersten Fall. Dasselbe hinsichtlich des Druckes ergibt sich auch, wenn wir die Gleichung:

$$(4) \quad \sum \frac{1}{2} m g^2 = \frac{1}{2} \sum \frac{m^2}{q^{n-1}} + {}^3 p v$$

benutzen, welche man aus der Virialgleichung erhält ( $g$  Geschwindigkeit,  $q$  Entfernung,  $p$  Druck,  $v$  Volumen). Die actuelle Energie des zweiten Gases ist  $\mu \cdot \alpha^2 \beta^3$  mal grösser als die des ersten. Ebenso können alle anderen Parameter, sofern nur ihre Bedeutung (und zwar die sogenannte kinetische) hinreichend feststeht, eingeführt werden.

Bleiben wir bei den drei Parametern  $p v A$  (Druck, Volumen, actuelle Energie), und beschränken wir uns auf ein nicht zusammengesetztes Gas (denn auf ein Gasgemisch lassen sich die Betrachtungen sofort ausdehnen), so folgt aus den obigen Erörterungen, dass die Grössen:

$$\frac{v A^{3/(n-1)}}{m^{6/(n-1)}}, \quad \frac{p m^{6/(n-1)}}{A^{(n+2)/(n-1)}}, \quad \frac{p^{3/(n+2)} v}{m^{6/(n+2)}}$$

für die beiden oben fingirten Gase denselben Werth besitzen. Nun setzen wir in Uebereinstimmung mit der mechanischen Theorie der Wärme voraus, dass der Zustand eines Körpers durch zwei Parameter bestimmt ist. Es können daher die genannten drei Grössen durch zwei Parameter und  $m$  ausgedrückt werden. Da von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\mu$  zwei willkürlich sind, so gibt es eine zweifach unendliche Reihe von Gasen und Gaszuständen, bei denen die oben erwähnten Grössen constant bleiben.

Hieraus folgt, dass jede derselben eine Function jeder anderen allein sein muss, und dieses gilt für jedes Gas. Da ferner  $p \cdot v / A$  eine identische Function jener Grössen ist, so können wir schreiben:

$$\frac{p \cdot v}{A} = f \left( \frac{v \cdot A^{3/(n-1)}}{m^{6/(n-1)}} \right) \text{ etc.}$$

Ich werde nun noch die Molecülzahl in die Formel einführen. Es ist offenbar  $f(\sigma \cdot v, \sigma \cdot v) = \sigma \cdot f(v, v)$ , wenn  $v$  die Anzahl der Molecüle bezeichnet, und  $\sigma$  beliebig ist. Hieraus

folgt  $f = v \cdot \varphi(v/v)$ . Es lauten daher die gefundenen Gleichungen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{pv}{A} = v \cdot f_1 \left( \frac{v}{v} \cdot \frac{A^{3/(n-1)}}{m^{6/(n-1)}} \right), \quad \frac{pv}{A} = v \cdot f_2 \left( \frac{p \cdot m^{6/(n-1)}}{A^{(n+2)/(n-1)}} \right), \\ \frac{pv}{A} = v \cdot f_3 \left( \frac{p^{3/(n+2)} \cdot v}{m^{6/(n+2)} \cdot v} \right). \end{array} \right.$$

$A$  ist hierbei auf ein Molecül bezogen, sonst müsste auch  $A$  durch  $v$  dividirt werden.

Diese Gleichungen sind miteinander wesentlich identisch und auseinander ableitbar.

Bei der Berechnung von  $n$  mit Hülfe dieser Gleichungen begegnen wir der Schwierigkeit, dass  $A$  nicht direct gemessen werden kann. Es bleibt nichts übrig, als an Stelle von  $A$  die Temperatur  $t$  einzuführen<sup>1)</sup>, obgleich über die kinetische Bedeutung dieser Grösse zur Zeit keine haltbare Ansicht besteht. Beschränken wir uns aber auf nicht allzu verdichtete Gase, so können wir  $A$  der Temperatur proportional setzen (gemäss der herkömmlichen Annahme). Wir setzen also:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{pv}{t} = v \cdot f_1 \left( \frac{v}{v} \cdot \frac{t^{3/(n-1)}}{m^{6/(n-1)}} \right), \quad \frac{pv}{t} = v \cdot f_2 \left( \frac{p \cdot m^{6/(n-1)}}{t^{(n+2)/(n-1)}} \right), \\ \frac{pv}{t} = v \cdot f_3 \left( \frac{p^{3/(n+2)} \cdot v}{m^{6/(n+2)} \cdot v} \right). \end{array} \right.$$

Für ein zusammengesetztes Gas ist  $pv/t$  ebenfalls eine blosse Function einer der drei Grössen  $vt^{3/(n-1)}$ ,  $p/t^{(n+2)/(n-1)}$  oder  $p^{3/(n+2)}v$ , und zwar kann diese Function aus den für die einzelnen zusammensetzenden Gase geltenden Functionen in einfacher Weise gebildet werden.

Ich werde nun zeigen, wie man dieselben Gleichungen auch unabhängig von den obigen Erörterungen mit Hülfe der Virialgleichung mittelst der mechanischen Wärmetheorie erhalten kann. Dabei wollen wir uns, soweit es möglich ist, von den beschränkenden Voraussetzungen, die wir oben gemacht haben, befreien. Ich lasse die Annahme, dass wir es mit einfachen Molecülen zu thun haben, fallen, und nehme also an, dass ein Molecül aus Atomen besteht, die sich nach dem erörterten Anziehungsgesetz anziehen.

1) In der That ist man hierzu bei einatomigen Gasen berechtigt.

Es mag zunächst bemerkt werden, dass man die Virialgleichung in der hier benutzten Form:

$$A = \frac{1}{2} \sum \frac{m_i m_K}{r_{iK}^{n-1}} + \frac{3}{2} p v$$

sofort erhält, wenn man gemäss dem Hamilton'schen Princip setzt:

$$\left[ \sum m \left( \frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) \right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} dt (\delta A + U)$$

und den Verschiebungen  $\delta x$  etc. eine solche Grösse ertheilt, dass das Gas in eine der ursprünglichen ähnliche Configuration übergeht. ( $U$  bedeutet die Arbeit der wirkenden Kräfte bei dieser Verschiebung.)

Dieses zeigt, dass die Virialgleichung auch zu den obigen Untersuchungen in Beziehung steht.

Ich setze:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial A}{\partial t} \\ \frac{\partial A}{\partial p} & \frac{\partial A}{\partial t} \end{vmatrix} = A.$$

Die Virialgleichung gibt, wenn man die Energie mit  $E$  bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{\partial E}{\partial t} \\ \frac{\partial E}{\partial p} & \frac{\partial E}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{3}{n-1} \begin{vmatrix} p & \frac{\partial t}{\partial v} \\ v & \frac{\partial t}{\partial p} \end{vmatrix} - \frac{3-n}{n-1} A.$$

Ich entnehme nun der mechanischen Theorie der Wärme die Beziehung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial E}{\partial p} & \frac{\partial t}{\partial p} \end{vmatrix} = t - p \frac{\partial t}{\partial p}.$$

Mithin ergibt sich:

$$(7) \quad t = \frac{n+2}{n-1} p \frac{\partial t}{\partial p} - \frac{3}{n-1} v \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{3-n}{n-1} A.$$

Diese Gleichung gilt allgemein für alle Aggregatzustände. Setzen wir  $A$  proportional der Temperatur, oder nehmen wir auch nur an, dass  $A$  eine Function der Temperatur sei, so ist  $A = 0$ . In der That wird man nun für nicht allzu verdichtete Gase mit genügender Annäherung die Annahme

machen dürfen, dass der Zustand der Molecüle wesentlich von der Temperatur allein abhängt, und zwar gilt dieses um so genauer, je höher die Temperatur ist. Setzen wir dann die Temperatur proportional der progressiven Bewegung der Molecüle, so ergibt sich  $\Delta = 0$ . Die Gl. (7) wird:

$$(8) \quad t = \frac{n+2}{n-1} p \frac{\partial t}{\partial p} - \frac{3}{n-1} v \frac{\partial t}{\partial v}.$$

Das Integral dieser partiellen Differentialgleichung ist  $t = pv \varphi(p^{3/(n+2)} v)$ , d. h. wir haben die Gl. (6) wiedergefunden; nur bleibt hier die Art, wie  $m$  in der Function  $\varphi$  vorkommt, unbestimmt.

Ich mache darauf aufmerksam, dass es genügt, eine vollkommene Definition der Temperatur zu finden, um vermittelst der Gl. (7) sofort eine den Gl. (6) analoge Formulierung der Zustandsgleichung zu finden, welche für alle Aggregatzustände gilt. Ferner bemerke ich, dass, falls Aggregate von Molecülen in dem Gase vorhanden sind, man natürlich consequenter Weise dazu geführt wird, die Temperatur proportional der actuellen Energie der fortschreitenden Bewegung der Aggregate und nicht der einzelnen Molecüle zu setzen. Diese Annahme ändert aber unsere Gleichung nicht wesentlich. Es folgt nämlich aus unseren anfänglichen Betrachtungen, dass die Zahl der Aggregate, die sich bilden, nahezu eine Function der Grössen  $vt^{3/(n-1)}$  etc. sein wird, sodass die Gl. (7) doch wieder auf die Form (8) gebracht werden kann.

Wir haben demnach gefunden, dass die Gl. (6) auch durch die Annahme zusammengesetzter Molecüle ihre Brauchbarkeit innerhalb gewisser Grenzen nicht verlieren. Ueber die Rolle, die das Moleculargewicht in diesen Gleichungen spielt, werden wir noch später einiges zu sagen haben.

Die meisten Formeln der mechanischen Wärmetheorie gewinnen durch die Gl. (6) eine bestimmtere Gestalt. Wegen der beschränkten Gültigkeit der letzteren gehe ich nur auf das ein, was für uns von unmittelbarem Nutzen ist.

Ich setze  $x = vt^{3/(n-1)}$  und  $pvt = \varphi(x)$ . Dann wird  $E - E_0 = \alpha_x t$ , wobei  $\alpha_x$  nur von  $x$  abhängt. Berücksichtigen wir noch die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \text{so kommt:}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x = c_x = a_x - \frac{3}{n-1} q(x) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t = \frac{q(x)}{x} + \frac{3}{n-1} \cdot q'(x),$$

wobei  $u$  die Entropie bezeichnet. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt  $a_x - 3/(n-1) q(x) = c_x = \text{constans}$ .

Es ergibt sich also, dass die spezifische Wärme bei constantem  $x$  constant ist. Ferner erhält man:

$$E - E_0 = A - H = \frac{3}{n-1} p v + c_x t$$

( $H$  bedeutet der Potential). Diese Gleichung führt, mit der Virialgleichung verglichen, zu dem Schluss, dass, wenn  $A = \psi(x)t$  gesetzt wird,  $\psi(x)$  eine Constante ist, d. h. setzen wir bei constantem  $x$   $A/t$  proportional, so besteht diese Proportionalität immer. Es ist ferner:

$$c_v = c_x + \frac{3}{n-1} \left( q(x) + \frac{3}{n-1} x q'(x) \right) = \frac{3}{n-1} v \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_v + c_x$$

$$\text{und} \quad c_p = \frac{n+2}{n-1} p \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_p + c_x.$$

Bezeichnen wir  $E - E_0 + p v$  mit  $\mathfrak{I}$ , so kommt:

$$\mathfrak{I} = \frac{n+2}{n-1} p v + c_x t.$$

Diese Grösse bleibt bei dem Versuch der Strömung der Flüssigkeit durch ein Diaphragma constant. Die Abkühlung hierbei erhält man nach der Formel:

$$(9) \quad c_p \frac{dt}{dp} = - \frac{n+2}{n-1} \left( \frac{d(pv)}{dp} \right)_t,$$

wie leicht aus den oben gegebenen Beziehungen folgt. Man erhält diesen Ausdruck auch sofort aus dem bekannten für die Abkühlung von Thomson gegebenen. Unser Ausdruck zeigt, wie die Abkühlung direct mit der Abweichung von Mariotte's Gasdruckregel zusammenhängt.

2. Ich gehe jetzt zur Bestimmung von  $n$  auf Grund der Gl. (6) über. Um diese Zahl nach experimentellen Daten zu berechnen, können wir verschiedene Wege einschlagen. Zunächst mögen Untersuchungen über die Compressibilität der Gase benutzt werden.

Bei der Wahl der experimentellen Feststellungen werden wir uns, wie aus dem Obigen folgt, gewisse Beschränkungen

aufzuerlegen haben. So wird z. B. nur die Minusabweichung von dem Mariotte'schen Gesetz benutzt werden dürfen. Das Verfahren, das ich zunächst einschlage, ist das folgende. Ich suche auf zwei Isothermen (es werden am besten weit voneinander entfernte Temperaturen gewählt) die Stellen auf, wo  $p_1 v_1 / t_1 = p_2 v_2 / t_2$  ist. Dann wird  $n$  berechnet aus:

$$n = 1 - 3 \frac{\log t_1 - \log t_2}{\log v_1 - \log v_2} \quad \text{oder} \quad n = \frac{\log p_2 - \log p_1 + 2}{\frac{\log t_2 - \log t_1}{\log p_2 - \log p_1} - 1}$$

$$\text{oder} \quad n = -2 - 3 \frac{\log p_2 - \log p_1}{\log v_2 - \log v_1}$$

Dieses Verfahren ergibt sich leicht bei Betrachtung der Gl. (6), in denen  $m = 1$  gesetzt wird. In den Isothermen bin ich nahezu bis zu den Drucken gegangen, bei denen  $pv$  ein Minimum hat, um grosse Abweichungen benutzen zu können. Dabei muss sich freilich ein Gang in den Werthen von  $n$  einstellen, da die so erhaltenen Zahlen schliesslich zu klein ausfallen müssen. (Dieses ergibt sich, wenn man erwägt, dass bei starkem Verdichtungsgrad auch die Aggregate als vom Druck beeinflusst angesehen werden müssen, und versucht, diesem Umstande durch Abzug vom Volumen Rechnung zu tragen.) Die nachfolgenden Tabellen geben über die Grösse der Abweichungen Aufschluss.

#### Versuche von Amagat über Kohlensäure.

35,1° C.		90,2° C.		100° C.	
$p$	$\frac{pv}{t}$	$p$	$\frac{pv}{t}$	$p$	$\frac{pv}{t}$
30	7,6602	30	8,5903	50	7,9893
40	6,7017	60	7,4471	70	7,3735
50	5,5988	90	6,3734	90	6,7826
				110	6,2314

#### $n$ berechnet aus den Versuchen von Amagat.

$t_1 = 35,1^\circ \quad t_2 = 100^\circ$			$t_1 = 35,1^\circ \quad t_2 = 90,2^\circ$		
$P_1$	$P_2$	$n$	$P_1$	$P_2$	$n$
30	(60,69)	2,1	30	(54,41)	2,1
(32,99)	70	2,0	(32,22)	60	2,1
(39,16)	90	1,9	40	(80,83)	1,9
40	(92,93)	1,9	(42,98)	90	1,9



Die durch Interpolation gefundenen Zahlen sind eingeklammert. Alle Werthe von  $n$  liegen nahe an 2. Ein Gang in dem oben erwähnten Sinne ist zwar deutlich zu erkennen, die Differenzen sind aber sehr geringfügig. Wollte man sie durch Beobachtungsfehler erklären, was hier nach dem Obigen durchaus nicht geschehen soll, so würden sie einem Fehler von etwa einem Procent in der Bestimmung des Productes  $pv$  entsprechen.

Versuche von Roth über Ammoniak.

99,6° C.		183,0° C.	
$p$	$\frac{pv}{t}$	$p$	$\frac{pv}{t}$
12,00	0,003 536	19,50	0,003 608
18,60	0,003 425	27,20	0,003 523
25,40	0,003 274	37,35	0,003 455
		58,00	0,003 220

$n$  berechnet aus den Versuchen von Roth.

$$t_1 = 99,6^\circ \text{ C.} \quad t_2 = 183^\circ \text{ C.}$$

$p_1$	$p_2$	$n$
12	(26)	2,1
(12,8)	27,2	2,1
(16,8)	37,35	2,0
25,4	(53,26)	2,1
18,6	(40)	2,1

Ich erinnere daran, dass wir die Gl. (6) ursprünglich ableiteten mit Vernachlässigung der Zusammensetzung der einzelnen Molecüle. Wir sahen später, dass die Gl. (6) auch mit Berücksichtigung dieses Umstandes ihre Brauchbarkeit behalten, wofern in ihnen  $m = 1$  gesetzt wird. So sehen wir denn auch hier eine sehr gute Uebereinstimmung der Werthe von  $n$ , obgleich Ammoniak zu den Gasen gehört, bei denen sich der erwähnte Einfluss stark geltend macht. Ordnet man nämlich die Gase nach der Grösse ihrer Compressibilität und darauf nach ihrem Moleculargewicht, so fallen beide Reihen durchaus nicht zusammen. Es steht mithin erfahrungsmässig fest, dass ein Gas durch Angabe seines Moleculargewichtes hinsichtlich seiner Compressibilitätsver-

hältnisse nicht bestimmt ist. Bei einigen Gasen ist dieses jedoch annäherungsweise der Fall, und dort werden wir die Gl. (6) in ihrem vollen Umfang gebrauchen dürfen; bei den übrigen müssen wir, wie schon hervorgehoben, die Gl. (6) specialisiren, indem wir  $m = 1$  setzen. Ich habe ferner Beobachtungen bezüglich  $\text{SO}_2$  und  $\text{C}_2\text{H}_4$  benutzt. Zu den folgenden Tabellen bemerke ich, dass zwei Werthe von der Benutzung ausgeschlossen werden mussten, da sie eine plötzliche Zunahme von  $p v$  statt einer Abnahme zeigten. ( $p = 18$  für  $\text{SO}_2$  bei  $99,6^\circ$  und  $p = 47,45$  für  $\text{C}_2\text{H}_4$  bei  $182,8^\circ$ .)

## Versuche von Roth über schweflige Säure.

99,6° C.		183,2° C.	
$p$	$\frac{p v}{t}$	$p$	$\frac{p v}{t}$
14	0,003 318	28	0,003 305
24	0,002 963	50	0,003 044 6
32	0,002 721	80	0,002 761
		100	0,002 515 3

$n$  berechnet aus den Versuchen von Roth über schweflige Säure.

$$t_1 = 99,6 \quad t_2 = 183,2.$$

$p$	$p_2$	$n$
(14,37)	28	2,3
(21,7)	50	2,0
24	(58,6)	1,9
(30,67)	80	1,8
32	(83,25)	1,8

## Versuche von Roth über Aethylen.

99,6° C.		182,8° C.	
$p$	$10^5 \frac{p v}{t}$	$p$	$10^5 \frac{p v}{t}$
20,50	351,18	37	356,39
21,65	347,70	40,20	352,01
24,00	346,895	52,80	346,76
25,85	345,96	62,05	340,68
28,80	339,19		

$n$  berechnet aus den Versuchen von Roth über Aethylen.

$$t_1 = 99,6^\circ \text{ C.} \quad t_2 = 182,8^\circ \text{ C.}$$

$p_1$	$p_2$	$n$	$p_1$	$p_2$	$n$
20,50	42,19	2,2	24,27	52,80	2,0
21,65	50,55	1,9	25,85	54,01	2,1
24,00	52,48	2,0	28,15	62,05	2,0

Bei Gasen, welche hinsichtlich ihrer Compressionsverhältnisse innerhalb eines gewissen Gebietes durch das Moleculargewicht allein hinreichend charakterisirt sind, kann man auch folgendes Verfahren anwenden. Man nimmt zwei verschiedene Gase und sucht auf zwei Isothermen die Stellen auf, wo:

$$p_1 \cdot \frac{d \log(p_1 v_1)}{d p_1} = p_2 \cdot \frac{d \log(p_2 v_2)}{d p_2} \quad \text{ist.}$$

Dort haben wir dann:

$$\frac{p_1 m_1^{6/(n-1)}}{t_1^{(n+2)/(n-1)}} = \frac{p_2 m_2^{6/(n-1)}}{t_2^{(n+2)/(n-1)}},$$

sodass  $n$  leicht berechnet werden kann.

Beispiel: Regnault gibt für gleiche Temperaturen die Zahlen:

Kohlensäure	Stickstoff
$p = 1 \quad v = 1$	$p = 11,9191 \quad v = \frac{1}{2}$
$p = 3,8973 \quad v = \frac{1}{4}$	$p = 19,7885 \quad v = \frac{1}{30}$

Setzt man innerhalb dieser kleinen Intervalle  $p_1 v_1 = R_1 - a_1 p_1$  und  $p_2 v_2 = R_2 - a_2 p_2$ , so ist  $(m_1/m_2)^{6/(n-1)} = R_2/R_1 \cdot a_1/a_2$ . Da in unserem Beispiel  $m_1/m_2 = \frac{44}{28}$  ist, so folgt:

$$n = 1,94.$$

Diese Zahl ist sehr befriedigend; leider lässt sich diese Methode nur selten anwenden.

Schliesslich will ich die Joule-Thomson'schen Ausströmungsversuche zur Berechnung von  $n$  verwerthen. Nach Gl. (9) haben wir:

$$c_p \frac{d t}{d p} = - \frac{n + 2 d(pv)}{n - 1 d p(t)}.$$

Die rechte Seite muss nach irgend einer den Erfahrungen gemässen Gleichung berechnet werden. Ich habe die einfachste Gleichung gewählt  $p v = A - B p$ .  $B$  nimmt mit der Temperatur ab; ich habe es der dritten Potenz der Temperatur umgekehrt proportional gesetzt (für Kohlensäure).

Man überzeugt sich leicht, dass die hierin liegende Willkürlichkeit keinen wesentlichen Einfluss auf den Werth von  $n$  hat, da die Benutzung irgend einer anderen Gleichung zu keinen schlechteren Resultaten führt. Für Kohlensäure geben die Beobachtungen Regnault's (die für  $3,2^\circ$  gelten):

$$pv = 1,020215 \frac{273 + t}{276,2} - 0,006584 \left( \frac{273 + t}{276,2} \right)^{-3} p.$$

Es ergibt sich:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{8\,428\,000}{(273 + t)^3} \cdot \frac{n + 2}{n - 1}.$$

In der folgenden Tabelle sind die aus dieser Formel mit  $n = 2$  berechneten Werthe von  $dt/dp$  mit den Ergebnissen der Versuche verglichen und die Werthe von  $n$  angegeben, die sich ergeben, wenn man für  $dt/dp$  den beobachteten Werth einsetzt.

#### Versuche von Joule und Thomson.

Temperatur	Beobachtet	Berechnet	Von van der Waals ber.	$n$
12,84	1,22	1,443	—	2,26
19,08	1,16	1,353	0,90	2,23
20,00	1,14	1,340	—	2,25
35,60	1,02	1,147	—	2,17
54,00	0,89	0,964	—	2,11
91,52	0,70	0,696	0,64	1,99
97,55	0,64	0,663	—	2,05

Zieht man in Betracht, dass die Zahlen, die man aus der thermodynamischen Formel mit Benutzung zuverlässiger Zustandsgleichungen erhält, keine bessere Uebereinstimmung zeigen, so muss die Uebereinstimmung unserer Formel zufriedenstellend genannt werden. Des Vergleiches halber habe ich die beiden Werthe, die van der Waals in seiner Schrift über „die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes“ berechnet hat, in der Tabelle angegeben. — Würden wir die Versuche über Luft ebenso behandeln, so erhielten wir etwas zu kleine Zahlen und für  $n$  etwa den Werth 1,8. Da  $n$  bei Anwendung der Gl. (6) in vielen Formeln der Gas-theorie auftritt, so werden wohl noch manche Beziehungen zur Berechnung von  $n$  verworther werden können, sobald hinreichende Beobachtungen vorliegen.

Aus allen angeführten Zahlen geht hervor, dass  $m_i m_k / r_{ik}^2$  jedenfalls den Haupttheil der Anziehung zweier Massentheilen ausmacht. Die Differenzen zwischen  $n$  und 2 sind aber auch zu geringfügig, als dass der Schluss gestattet wäre, dass ausser diesem Gliede noch ein weiteres anzunehmen sei. Ausserdem fanden die Abweichungen eine genügende Erklärung in den gemachten Vernachlässigungen. Hierzu kommt die interessante und gewiss von vielen erwartete Thatsache, dass  $n$  sich gerade gleich 2 ergab. Bedeutet dies doch, dass dasselbe Gesetz, das den Makrokosmos beherrscht, sich auch im Mikrokosmos als gültig erwiesen hat. Ich spreche daher das Ergebnis meiner Arbeit dahin aus, dass auch die kleinsten Massentheile sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen.

August 1888.

#### V. *Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes; von A. Schleiermacher.*

In einer Untersuchung über die Wärmeleitungsfähigkeit der Gase Luft, Wasserstoff und Kohlensäure<sup>1)</sup> habe ich Werthe erhalten, welche von den theoretisch berechneten Werthen sehr beträchtlich abweichen. Nun kann man zwar jede der vorliegenden Theorien mit den Beobachtungen in Einklang bringen, indem man bestimmte Annahmen über die Bethheiligung der intramolecularen Energie an der Wärmeleitung der zwei- und mehratomigen Gase macht. Wenn man aber die wohl am nächsten liegende Annahme einführt, dass sich die intramoleculare Energie bei der Wärmeleitung mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, wie die moleculare Energie, so liefert damit die von Hrn. Boltzmann entwickelte Theorie grössere Werthe als die Beobachtung, die Theorie des Hrn. O. E. Meyer dagegen zu kleine Werthe. Da man nun die Annahme, dass die intramoleculare Energie noch schneller übertragen werde, als die moleculare, von

1) A. Schleiermacher, Wied. Ann. 34. p. 623. 1888.

vornherein als höchst unwahrscheinlich ausschliessen darf, zog ich<sup>1)</sup> den Schluss, dass die von Hrn. Meyer hergeleitete Theorie mit den Thatsachen unvereinbar sei. Eine endgültige Entscheidung liefert die Ermittlung der Leitungsfähigkeit eines einatomigen Gases, da hier die erwähnten Annahmen gegenstandslos und also ohne Einfluss auf den Vergleich von Theorie und Beobachtung sind.

Daher unternahm ich den Versuch, die Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes zu messen, und theile im Folgenden die erhaltenen Resultate mit.

Durch den Vergleich der Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes mit derjenigen der anderen Gase durfte man ferner auch Aufschluss darüber erwarten, in welchem Verhältniss die intramoleculare Energie an der Wärmeleitung der mehratomigen Gase theilnimmt.

Da die Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes nur bei Temperaturen oberhalb 180° bestimmbar ist, so wird dadurch die Schwierigkeit der Messung vergrössert, und es dürfte kaum möglich sein, hier ebenso genaue Zahlen zu erhalten, als bei anderen Gasen. Dasselbe gilt wohl auch von der Bestimmung der Reibungsconstante, die ja bekannt sein muss, um die Leitungsfähigkeit theoretisch berechnen zu können. Doch glaube ich, dass die erhaltenen Resultate genau genug sind, um wenigstens die erste der erwähnten Fragen zur Entscheidung zu bringen.

Methode und Versuchsanordnung waren die gleichen, wie bei den früheren Messungen. Nur der Apparat musste insofern abgeändert werden, dass statt des Platindrahtes, der sich in Quecksilberdampf sehr schnell amalgamirt, ein Nickeldraht eingespannt wurde. Die Electrodendrähte bestanden aus sehr feinem Neusilberdraht und waren mit Hartloth an den Nickeldraht angelöthet. Zum Einschmelzen der Drahtenden in den Glasapparat mussten freilich Platindrähte verwendet werden, die an den Enden des Nickeldrahtes und der Electrodendrähte angelöthet wurden. Diese Platinenden, sowie die Neusilberdrähte waren schwach verkupfert und an der Luft ausgeglüht. Der so entstandene dünne Ueberzug von

1) A. Schleiermacher, l. c. p. 646.

Kupferoxyd genügte, um sie gegen Amalgamation zu schützen. Die Dimensionen des Apparates sind:

Länge des Nickeldrahtes zwischen den Electroden	305,2 mm
Durchmesser des Drahtes . . . . .	0,284 mm
Widerstand bei 0° . . . . .	0,6362 S.-E.
Lichter Durchmesser des Glasrohres . . . . .	18,2 mm
Dicke der Glaswand . . . . .	0,8 mm.

Um den Quecksilberdampf in hinreichender Dichte und doch in ungesättigtem Zustande untersuchen zu können, dienten Bäder von siedendem Anilin (182,5°) und siedendem Xylidin (215,0°). Der Apparat war horizontal in einem 5 l haltenden Kasten aus hart verlöthetem, starkem Eisenblech befestigt. Eine eiserne Deckplatte, mit eingelegter Bleidichtung auf eine Flansche am oberen Rande des Kastens verschraubt, schloss diesen dampfdicht ab. In den Deckel sind zwei Rohrstützen eingelöthet und in diese Glasröhren eingekittet, welche als Rückflusskühler dienten. Durch das eine Kühlrohr führte das den Apparat mit der Pumpe verbindende Glasrohr. Auch die vier Zuleitungsdrähte zu dem Nickeldraht und den Electroden liefen durch die Kühler. Ausserdem hing noch in jedem ein in die Flüssigkeit eintauchendes Thermometer, um daran die Constanz der Siedetemperatur controliren zu können. Durch Reguliren der fünf unter den Kasten gesetzten Brenner gelang es leicht, das Sieden der Flüssigkeit so gleichmässig zu erhalten, dass sich der Dampf in den Kühlröhren lange Zeit immer bis zur gleichen Höhe erhob. Um die Berührung des Dampfes mit der Luft und die dabei stattfindende Veränderung der Flüssigkeit möglichst einzuschränken, waren die Kühler am oberen Ende mit Watte verstopft.

Widerstand des Drahtes bei 0° und Temperaturcoefficient der Widerstandsänderung wurden ebenso wie früher bestimmt. Der letztere erwies sich auffallend stark mit der Temperatur veränderlich. Der Temperaturcoefficient beträgt nämlich zwischen:

0—18	0—55	0—100	0—138	0—215°
0,0 <sub>3</sub> 310	0,0 <sub>3</sub> 326	0,0 <sub>3</sub> 3583	0,0 <sub>3</sub> 383	0,0 <sub>3</sub> 4262.

Danach wurde zur Berechnung gesetzt:  $\alpha = 0,0_23000$   
 $+ 0,0_5587 t$ .



Zur Messung der allein durch die Strahlung übertragenen Wärme wurde der Apparat bei  $250^{\circ}$  und unter häufigem Ausglühen des Drahtes möglichst gut ausgepumpt und blieb während der Beobachtungen mit der Pumpe in Verbindung. Tab. I enthält die Werthe der ausgestrahlten Wärmemengen in Grammcorien für die Temperaturdifferenzen  $t - t'$  zwischen Draht und Umhüllung (Bad).

Tabelle I.

$t' = 0^{\circ}$		$t' = 100^{\circ}$		$t' = 215^{\circ}$	
$t - t'$	$S$	$t - t'$	$S$	$t - t'$	$S$
11,91 <sup>o</sup>	0,000 532	7,78 <sup>o</sup>	0,000 930	5,10 <sup>o</sup>	0,001 518
13,16	583	8,64	1 163	5,78	1 792
16,18	739	11,14	1 362	7,57	2 299
19,57	898	17,54	2 197	8,66	2 832
23,23	1 103	29,88	4 077	15,97	5 060
34,39	1 742	40,53	5 717		

Aus diesen Zahlen konnten die Werthe der Strahlung für  $t' = 182,5^{\circ}$ , soweit sie zur Berechnung der im Anilinbad angestellten Wärmeleitungsversuche erforderlich waren, hinlänglich genau ermittelt werden.

Dem neuerdings von Hrn. H. F. Weber<sup>1)</sup> aufgestellten Strahlungsgesetz entsprechen die Beobachtungen am Nickeldraht nicht so gut als die früheren an Platindrähten. Berechnet man die von Hrn. Weber mit  $C$  bezeichnete Constante für die drei Temperaturen, bei denen der Nickeldraht untersucht wurde, so erhält man die Mittelwerthe:  $C_0 = 10^{-6} \cdot 2,16$ ;  $C_{100} = 10^{-6} \cdot 3,29$ ;  $C_{215} = 10^{-6} \cdot 4,18$ . Ein Wachsen dieser Grösse mit der Temperatur zeigen übrigens auch die beiden zuletzt von mir untersuchten Platindrähte, aber in viel geringerem Maass als der Nickeldraht. Es ergibt nämlich Platindraht I  $C_0 = 10^{-6} \cdot 3,41$ ;  $C_{100} = 10^{-6} \cdot 3,88$ , und Platindraht II  $C_0 = 10^{-6} \cdot 4,42$ ;  $C_{100} = 10^{-6} \cdot 5,14$ . Eine Aenderung des „Temperaturcoefficienten  $\alpha$ “ hebt die Inconstanz von  $C$  bei dem Nickeldraht nicht. Es muss also weiteren Untersuchungen überlassen werden, die Ursache der vorliegenden Abweichungen aufzuklären.

1) H. F. Weber, Ber. d. Berl. Akad. **37**. p. 933. 1888.

Die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit wurde an drei verschiedenen Füllungen des Apparates mit Quecksilberdampf ausgeführt. Der Druck des Dampfes, aus den eingeführten Quecksilbermengen berechnet, betrug bei der ersten Füllung  $p_1 = 10,3$  mm für  $215^\circ$ ; bei der zweiten Füllung  $p_2 = 3,2$  mm für  $215^\circ$  und  $3,0$  mm für  $182,5^\circ$ ; bei der dritten Füllung  $p_3 = 7,0$  mm für  $215^\circ$  und  $6,6$  mm für  $182,5^\circ$ . Da diese Drucke höchstens zwei Drittel des Sättigungsdruckes erreichen, welcher bei  $215^\circ$  29 mm und bei  $182,5^\circ$  10 mm beträgt, darf man wohl annehmen, dass der Dampf stets aus isolirten Atomen bestand. Uebrigens haben die Herren Kundt und Warburg die Einatomigkeit des Dampfes auch für den gesättigten Zustand bewiesen.

Zur Füllung des Apparates wurde die abgewogene Quecksilbermenge in das geschlossene Ende eines knieförmig gebogenen und seitlich an das Verbindungsrohr von Apparat und Pumpe angesetzten Schliffstückes gebracht. Nachdem der Apparat unter Erwärmung vollkommen evacuirt und wieder abgekühlt war, liess man durch Drehen des Schliffstückes das Quecksilber in den Apparat einfallen. Eine Stelle des Verbindungsrohres nahe am Apparat, die zu einer dickwandigen Capillare verengt war, wurde dann bis fast zum Erweichen erhitzt und, nachdem das Vacuum nochmals geprüft war, abgeschmolzen.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse der Messungen zusammengestellt. Die römischen Ziffern beziehen sich auf die Füllungen,  $t - t'$  ist der Temperaturüberschuss des Drahtes und  $L/(t - t')$  sind die durch Leitung übertragenen Wärmemengen für die Einheit des Temperaturüberschusses, also der Leitungsfähigkeit proportionale Grössen.

Tabelle II.

$t' = 182,5^\circ$		$t' = 215^\circ$	
$t - t'$	$L/(t - t')$	$t - t'$	$L/(t - t')$
I. —	—	10,04°	0,000 882
I. —	—	12,06°	900
II. 7,04°	0,000 802	6,46°	896
II. 10,23°	803	9,34°	897
II. —	—	11,54°	900
III. 6,98°	820	6,61°	877
III. 10,20°	818	9,48°	888

Der Einfluss von Strömungen, der der Dichte proportional sein würde, tritt hinter den Beobachtungsfehlern ganz zurück. Aus dem Mittelwerth aller Bestimmungen erhält man die Wärmeleitungsfähigkeit bei der mittleren der Temperaturen  $t' + (t - t')/2$ :

$$h = 0,01846 \text{ g/cm. sec. bei } 203^\circ.$$

Luft und Wasserdampf, die sich während der Messung von der Glaswand des Apparates abgelöst haben könnten, würden die Leitungsfähigkeit erhöhen, und zwar müssten z. B. die Werthe um so mehr gefälscht sein, je geringer die Dichte des Quecksilberdampfes ist. Davon lassen die Zahlen nichts erkennen, indem eine regelmässige Abhängigkeit von der Dichte, wie bereits erwähnt, überhaupt nicht hervortritt. Einer Correction wegen der Glasleitung<sup>1)</sup> bedürfen die Zahlen nicht, da die übergeführten Wärmemengen zu gering sind.

Der Temperaturcoefficient der Leitungsfähigkeit, aus den Mittelwerthen für  $182,5^\circ$  und  $215^\circ$  berechnet, ergibt sich zu  $\gamma = 0,0074$ . Wenn man auch die Genauigkeit dieser Zahl wegen der relativ grossen Beobachtungsfehler und des geringen Temperaturintervalles, aus dem sie abgeleitet ist, nicht zu hoch schätzen darf, so mag doch darauf hingewiesen werden, dass sie sich nicht allzuweit von dem von der Theorie verlangten Werth entfernt. Bei einatomigen Gasen mit constanter specifischer Wärme sollte nämlich die gleiche Abhängigkeit von der Temperatur für die Leitungsfähigkeit, wie für die Reibungsconstante bestehen. Aus seinen Messungen der Reibungsconstante des Quecksilberdampfes hat Hr. S. Koch<sup>2)</sup> die Aenderung der Constante mit der Temperatur durch die Formel dargestellt:  $\mu = \mu_0 (1 + \alpha t)^{1,6}$ , worin  $\alpha = 0,003665$ . Drückt man die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit von der Temperatur durch eine ähnliche rationelle Formel aus, so erhält man als Werth des Exponenten 1,4.

Nach Beendigung der Versuche mit Quecksilberdampf war es meine Absicht, durch einige Bestimmungen der Lei-

1) Schleiermacher, l. c. p. 640.

2) S. Koch, Wied. Ann. 19. p. 870. 1883.

tungsfähigkeit der Luft bei  $0^\circ$  die Messungen mittelst des jetzigen Apparates an die früheren Messungen anzuschliessen.

Leider zerbrach der Apparat, ehe ich diese naheliegende Vervollständigung meiner Arbeit ausführen konnte, und von der Herstellung eines neuen Apparates sah ich vorerst ab, da der angedeutete Zweck damit doch nicht erreicht werden konnte.

Wir haben nunmehr den für die Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes gefundenen Werth mit den Forderungen der Theorie zu vergleichen. Alle bisher entwickelten Theorien kommen in ihrem Endresultat dahin überein, dass die Leitungsfähigkeit  $k$  eines einatomigen Gases proportional ist dem Product aus der Reibungsconstante  $\eta$  mit der specifischen Wärme bei constantem Volumen  $c'_v$ , sodass also der Quotient  $k/\eta \cdot c_v$  für alle einatomigen Gase den gleichen Werth besitzt. Dieses Resultat ist unzweifelhaft richtig; es steht damit in Einklang, dass erfahrungsgemäss sich die Leitungsfähigkeit der Gase ebenso wie die Reibungsconstante als unabhängig vom Druck erweist. Nur in dem numerischen Werth des Quotienten gehen die Theorien auseinander und in diesem Punkt sind sie also durch die Beobachtung zu prüfen. Die Boltzmann'sche Theorie ergibt diesen Werth = 2,5, wenn die Hypothese eingeführt wird, dass die Molecüle abstossende Kräfte aufeinander ausüben, welche der umgekehrten fünften Potenz der Entfernung proportional sind. Die Entwicklung des Hrn. O. E. Meyer führt auf den Werth 1,53. Für den Quecksilberdampf lässt sich die specifische Wärme  $c_v$  aus dem von den Herren Kundt und Warburg ermittelten Verhältniss der beiden specifischen Wärmen berechnen zu 0,01485. Die Reibungsconstante ist nach den Messungen von Hrn. S. Koch  $\eta = 0,03162 (1 + 0,003665 t)^{1,60}$ . Hieraus ist der Werth von  $\eta$  für die Temperatur  $203^\circ$  zu berechnen, resp. zu extrapoliren, da die Beobachtungen nur das Temperaturintervall  $270-380^\circ$  umfassen. Man erhält  $\eta_{203^\circ} = 0,0395$ . Aus diesen Zahlen ergibt sich der Werth des Quotienten  $k/\eta \cdot c_v$  zu 3,15, d. h. mehr als doppelt so gross, als der Werth 1,53 der Meyer'schen Theorie. Damit ist also bewiesen, dass diese Theorie zu einem mit der Erfahrung unvereinbaren Resultat führt.

Weniger entscheidend ist der gefundene Werth von  $k/\eta \cdot c_v$  in Bezug auf die Gültigkeit der Boltzmann'schen Theorie. Er ist freilich um nahe 25 Proc. grösser, als diese Theorie verlangt, aber es mag dahingestellt bleiben, ob die Abweichung nicht auch durch die relativ grossen Beobachtungsfehler bei der Bestimmung sowohl der Leitungsfähigkeit als auch der Reibungsconstante erklärt werden kann. Die folgenden Betrachtungen machen mir allerdings wahrscheinlich, dass der gefundene Werth 3,15 eher zu klein als zu gross ist, und dass daher auch der Boltzmann'sche Werth nicht den Thatsachen entspricht.

Für die Wärmeleitung der mehratomigen Gase führt die Theorie nicht unmittelbar zu einem bestimmten Ergebniss; man hat hier zunächst eine Annahme über die Betheiligung der intramolecularen Energie an der Leitung zu machen, über deren Berechtigung zur Zeit nur der Vergleich mit den Beobachtungen einen Anhalt liefert. Eine der möglichen Annahmen ist die, dass innere und progressive Energie sich in demselben Verhältniss an der Wärmeleitung betheiligen, indem sie in dem überall gleich temperirten Gas stehen. Diese Annahme werde mit (I) bezeichnet. Sie führt für die Wärmeleitungsfähigkeit aller Gase auf den Ausdruck  $k = q \cdot \eta \cdot c_v$ , wo  $q$  eine Constante. Nach einer anderen Annahme (II), die einen zweiten Grenzfall darstellt, geschieht die Uebertragung der Wärme allein durch die progressive Energie der Molecüle. Hiernach hat man statt der specifischen Wärme  $c_v$ , welche der gesammten Energie der Molecüle  $H$  proportional ist, eine Grösse einzuführen, welche der fortschreitenden Energie  $K$  proportional ist, also statt  $c_v$  zu setzen  $c_v \cdot K/H$ . Da  $K/H = \frac{2}{3} \cdot (x - 1)$ , wenn  $x = c_p/c_v$ , so ist also  $c_v$  durch  $\frac{2}{3} \cdot (x - 1) c_v$  zu ersetzen, und man erhält  $k = \frac{2}{3} \cdot q \cdot (x - 1) c_v \cdot \eta$ . Für ein einatomiges Gas führen beide Ausdrücke, da  $\frac{2}{3}(x - 1) = 1$  sein muss, auf denselben Werth. Ergibt sich nun aus den Beobachtungen  $q = k/\eta \cdot c_v$  für alle Gase gleich und so gross, wie für den Quecksilberdampf, so hat man sich für die Annahme (I) zu entscheiden. Ist dagegen der Quotient  $q = k/(\frac{2}{3}(x - 2) \cdot c_v \cdot \eta)$  bei allen Gasen gleich und gleich dem für Quecksilberdampf, so ist damit die Richtigkeit der Annahme (II) bewiesen. Es kann aber

auch drittens der Fall sein, dass keine der beiden Annahmen durch die Beobachtung bestätigt wird: wenn nämlich die innere Energie an der Leitung theilnimmt, aber in geringerem Maass, als es die Annahme (I) verlangt. In diesem Fall wird der Werth des ersten Quotienten kleiner, der des zweiten grösser sein müssen, als beim Quecksilberdampf. Nachstehend sind die Quotienten für die vier von mir untersuchten Gase zusammengestellt; von den zur Berechnung erforderlichen Zahlen sind die Reibungsconstanten den Beobachtungen des Hrn. von Obermayer<sup>1)</sup>, die specifischen Wärmen und die Verhältnisse der beiden specifischen Wärmen einer Zusammenstellung des Hrn. Wüllner<sup>2)</sup> entnommen.

Tabelle III.

	$k$	$\eta$	$c_v$	$\alpha$	(I)	(II)
Quecksilber	203°	0,0,185	0,0,394	0,01485	1,66..	3,15
Luft	0°	0,0,562	0,0,1678	0,1690	1,405	1,98
Wasserstoff	0°	0,0,410	0,0,861	2,461	1,385	1,94
Kohlensäure	0°	0,0,327	0,0,1383	0,1489	1,311	1,59

Hieraus ergibt sich, dass der nach der ersten Annahme berechnete Quotient durchaus nicht constant ist. Diese Annahme ist daher abzuweisen. Dagegen wird für die drei mehratomigen Gase die Hypothese (II) recht gut bestätigt: die Abweichungen bei den einzelnen Gasen von dem Mittelwerth 3,34 sind ganz unerheblich; andererseits beträgt die Differenz zwischen diesem und dem für Quecksilberdampf gefundenen Werthe nur 6 Proc. Man könnte die Differenz den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zuschreiben, man könnte den Grund der Abweichung aber auch darin sehen, dass bei den mehratomigen Gasen die intramoleculare Energie in geringem Maasse, weit weniger, als es die Annahme (I) fordert, zur Wärmeleitung beiträgt. In jedem Falle ergibt sich als Resultat unserer Vergleichung, dass bei den Gasen *Luft, Wasserstoff und Kohlensäure die Wärmeleitung im wesentlichen in der Uebertragung von nur progressiver Energie besteht.*

Dasselbe wie die eben mitgetheilte Berechnung lehrt auch die Betrachtung der relativen Leitungsfähigkeiten in

1) A. v. Obermayer, Wien. Ber. **73**, II. Abth. p. 433. 1876.

2) A. Wüllner, Wied. Ann. **4**, p. 321. 1878.

Bezug auf Luft. Nach Annahme (I) sollen diese gleich sein dem Verhältniss  $\eta c_v / \eta' c_v'$ , nach Annahme (II) gleich  $\eta(\alpha - 1)c_v / \eta'(\alpha' - 1)c_v'$ , wo sich die Buchstaben mit Index auf Luft beziehen. Die betreffenden Werthe sind in der folgenden Uebersicht mit den durch die Beobachtung erhaltenen Werthen zusammengestellt. Wie früher sind die Zahlen beim Quecksilberdampf für 203°, bei den anderen Gasen für 0° berechnet. Der beobachtete Werth für Wasserstoff ist mit beiden Annahmen gleich gut verträglich, aber die Zahlen für Kohlensäure und namentlich für Quecksilberdampf sind nur mit Annahme (II) vereinbar.

Tabelle IV.

	Quecksilber	Wasserstoff	Kohlensäure
(I)	0,135	7,47	0,726
(II)	0,209	7,10	0,557
beobachtet	0,223	7,30	0,581

Es soll nun nicht behauptet werden, dass für alle Gase, namentlich für solche mit complicirteren Moleculen, die Annahme (II) ebenso genau, wie für die oben angeführten Gase, gültig sei. Von denjenigen Gasen, deren Leitungsfähigkeit von Hrn. Winkelmann<sup>1)</sup> beobachtet ist, lassen sich noch drei, Kohlenoxyd, Stickoxydul und Aethylen, der Vergleichung unterwerfen, da für sie die erforderlichen Grössen bekannt sind. Für dieselben ist in der folgenden Zusammenstellung das Ergebniss der Berechnung der Quotienten (I) und (II), sowie die dabei benutzten Werthe von  $k$ ,  $\eta$ ,  $c_v$  und  $\alpha$  angeführt. Die Grössen  $\eta$ ,  $c_v$  und  $\alpha$  sind wieder den bereits genannten Quellen entnommen. Um Zahlen zu erhalten, welche mit den früher angeführten vergleichbar sind, habe ich, da die Winkelmann'schen Bestimmungen der Leitungsfähigkeiten kleinere Werthe ergaben als die meinigen, an jenen eine Correction angebracht, deren Betrag nach den Differenzen unserer Beobachtungen für Luft und für Kohlensäure bemessen ist.

1) A. Winkelmann, Pogg. Ann. 156 p. 497. 1875.



Tabelle V.

	$k_{\text{Winkel.}}$	$k_{\text{corr.}}$	$\eta$	$c_v$	$\alpha$	(I)	(II)
Kohlenoxyd	0,0,499	544	0,0,1625	0,1729	1,403	1,94	3,20
Stickoxydul	0,0,350	376	0,0,1353	0,1513	1,311	1,84	3,94
Aethylen	0,0,395	427	0,0,922	0,2701	1,245	1,71	4,66

Die Zahlen unter (I) zeigen zunächst, dass auch für diese Gase die Annahme (I) nicht richtig sein kann, da dieselben weit unter dem für Quecksilberdampf erhaltenen Werth bleiben. Dagegen schliesst sich der nach (II) berechnete Werth für das Kohlenoxydgas recht gut den früher gefundenen an, und es scheint also dieses Gas ebenfalls dem oben ausgesprochenen Satz zu folgen. Grösser sind die Werthe für Stickoxydul und namentlich für Aethylen, sodass man hier die Fortpflanzung auch intramolecularer Energie bei der Wärmeleitung anzunehmen hat.

Eine weitere Entscheidung zwischen den beiden Annahmen müsste die Untersuchung der Temperaturcoefficienten der Wärmeleitung liefern bei Gasen, bei welchen sich sowohl  $c_v$  als  $c_p/c_v$  mit der Temperatur ändern. Von den von mir untersuchten Gasen würde hierfür nur Kohlensäure in Betracht kommen. Man wird indessen dem Resultat der Vergleichung keine grosse Bedeutung beilegen können, da, wie bereits in der früheren Abhandlung hervorgehoben, die zu Grunde zu legenden Zahlen noch zu wenig gesichert sind, und sich ausserdem bei der Aenderung der Leitung mit der Temperatur Einflüsse geltend machen können, die bis jetzt zu wenig untersucht sind. Es sei daher nur angeführt, dass sich der für die Wärmeleitung der Kohlensäure gefundene Temperaturcoefficient der Annahme (I) besser anschliessen würde, als der Annahme (II).

Die im Vorstehenden gezogenen Schlussfolgerungen behalten natürlich nur dann Gültigkeit, wenn unzweifelhaft ist, dass die Wärmeübertragung in einem Gase nur vermöge der Bewegung seiner Molecüle stattfindet. Würde dagegen gleichzeitig auch Wärme durch die „innere Strahlung“ der Molecüle übergeführt, so wäre eine Prüfung der kinetischen Theorien durch die Beobachtung auf dem eingeschlagenen Wege nicht möglich. Die Uebereinstimmung aber, welche die Vergleichung bei den vier Gasen Luft, Wasserstoff,

Kohlenoxyd und Kohlensäure ergeben hat, beweist doch wohl, dass bei diesen die innere Strahlung keinesfalls beträchtlich zur Wärmeübertragung beiträgt, da sich ja die Kohlensäure, bei der man infolge ihres merklichen Absorptionsvermögens am ersten die Mitwirkung der inneren Strahlung vermuthen sollte, nicht von diathermanen Gasen unterscheidet. Ueber das Absorptionsvermögen des Quecksilberdampfes ist freilich nichts bekannt; es könnte also behauptet werden, dass in dem ermittelten Werthe der Leitungsfähigkeit noch ein der inneren Strahlung zuzuschreibender Antheil enthalten sei. Auch aus diesem Grunde will ich daher unentschieden lassen, ob das für den Quecksilberdampf gefundene Resultat gegen die Richtigkeit der Boltzmann'schen Theorie beweisend ist. Dagegen bleibt gewiss, dass die Abweichung des gefundenen Werthes von der Meyer'schen Theorie nicht durch die innere Strahlung erklärt werden kann. Wenn deren Einfluss so gross sein sollte, müsste er in einer sehr bemerklichen Abhängigkeit des scheinbaren Leistungsvermögens von der Dichte des Dampfes und von der Temperatur des Drahtes zum Ausdruck kommen, und hiervon lassen die Beobachtungen nichts erkennen.

Die mitgetheilten Schlussfolgerungen würden auch dann zweifelhaft werden, wenn sich der von den Herren Lummer und Pringsheim<sup>1)</sup> neuerdings mitgetheilte Werth des Verhältnisses der beiden specifischen Wärmen der Luft als richtig bestätigen sollte. Vor allem würde dann in Frage gestellt, ob der Quecksilberdampf, der nach seinen chemischen Eigenschaften unbezweifelbar einatomig ist, sich auch in seinen thermischen Eigenschaften wie ein einatomiges Gas verhält.

Karlsruhe, im October 1888.

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. phys. Ges. Berlin 1887. p. 136.

## VI. Die Zähigkeit der Gase bei hohen Temperaturen<sup>1)</sup>; von Carl Barus.

(Hierzu Taf. VII Fig. 1–11.)

### I. Einleitung.

1. In vorliegender Arbeit versuche ich die Zähigkeitsänderungen der Gase dadurch zu ermitteln, dass ich dieselben durch heisse, resp. durch glühende Platincapillaren transpiriren lasse. Es bietet aber sowohl die Herstellung sowie die weitere Behandlung langer, befriedigend fehlerfreier Metallcapillaren viele Schwierigkeiten. Ich beobachtete daher meistens mit Röhren von ein drittel bis über einen halben Meter Länge, und zwar fing ich mit einem Kaliber an, für welches das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz bei niederen Temperaturen nicht, wohl aber bei hohen Temperaturen wegen der bedeutend verlangsamten Strömung galt. Solche Röhren zog ich dann successive zu dünneren Durchmessern heraus, bis sich schliesslich ein Kaliber herausstellte, das dem besagten Gesetz sowohl bei niederen wie auch bei hohen Temperaturen entsprach. Dieses ist der chronologische Gang meiner Arbeit. In der Ausarbeitung gedenke ich mich nicht weiter daran zu halten.

2. Die Literatur des Gegenstandes ist wohl hinglänglich bekannt. Insbesondere hat Hr. O. E. Meyer sowohl in seinen Originalarbeiten<sup>2)</sup>, sowie auch in seinem Buche<sup>3)</sup> die Thatsachen vielfach erforscht und zusammengestellt. Unter anderen hat auch in neuerer Zeit Hr. S. W. Holman<sup>4)</sup> sämtliche Arbeiten einem kritischen Vergleiche unterzogen. Ich kann mich daher auf wenige Notizen beschränken.

1) Mit Genehmigung des Directors der U. S. Geological Survey, Hrn. Major J. H. Powell, mitgetheilt. Eine vorläufige Notiz über diese Arbeit findet sich im Amer. Journ. (3) 35. p. 407. 1888.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 253. 353. 1866.

3) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase p. 123 ff. Breslau 1877.

4) S. W. Holman, Proc. Am. Acad. 21. p. 1. 1886; Phil. Mag. (5) 21. p. 199. 1886.

Nachdem die grundlegenden Arbeiten Graham's<sup>1)</sup> erschienen, und die moleculare Weglänge durch Clausius<sup>2)</sup> in die Wissenschaft eingeführt worden war, gelang es Maxwell<sup>3)</sup>, aus Stokes'schen<sup>4)</sup> Zahlen für die Zähigkeit der Luft die mittlere freie Weglänge zu berechnen. Maxwell ging weiter, indem er versuchte, auch die thermischen Verhältnisse darzustellen, gelangte jedoch zu Resultaten, welche, obgleich mit der Coulomb'schen Schwingungsmethode experimentell bestätigt<sup>5)</sup>, von späteren Forschern nicht wiedergefunden wurden. Durch Verbesserungen dieser Methode erhielten zwar Meyer<sup>6)</sup>, sowie Puluj<sup>7)</sup>, indem er einen Kundt-Warburg'schen Apparat gebrauchte, Werthe, die unter sich, sowie mit den Daten anderer Methoden<sup>8)</sup> besser, man kann sagen befriedigend im Einklang sind. Einen besonderen Standpunkt bewahrt die kritisch eingehende Arbeit Schumann's.<sup>9)</sup> Indessen ist doch der wichtigen Arbeit Meyer's<sup>10)</sup>, in welcher er den theoretischen Ergebnissen von Stokes<sup>11)</sup> oder Stefan<sup>12)</sup> folgend, die Transpiration der Gase genau ableiten konnte, als der wesentlichste Fortschritt auf diesem Gebiete anzusehen. Meyer entwickelte dabei eine dem Poiseuille's-<sup>13)</sup> und Hagen'schen<sup>14)</sup> Gesetze sehr ähnliche Gleichung, welche letztere durch Stokes<sup>15)</sup> und andere

1) Graham, Phil. Trans. Lond. p. 573. 1846; *ibid.* p. 349. 1849; Lieb. Ann. **76**. p. 138. 1850.

2) Clausius, Pogg. Ann. **105**. p. 239. 1858.

3) Maxwell, Rep. Br. Assoc. 1859. (2) p. 9; Phil. Mag. (4) **19**. p. 19. 1860. Cf. *ibid.* **20**. p. 21. 1860.

4) Stokes, Fortschritte d. Phys. 1850—1851. p. 101; Phil. Mag. (4) **1**. p. 337. 1851.

5) Maxwell, Phil. Trans. **156**. p. 249. 1866.

6) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **125**. p. 177. 1865; **143**. p. 14. 1871.

7) Puluj, Wien. Ber. **73**. (2) p. 589. 1876.

8) Cf. O. E. Meyer, Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Acad. 1887. p. 361.

9) Schumann, Wied. Ann. **23**. p. 353. 1884.

10) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **127**. p. 367. 1866.

11) Stokes, Cambridge Phil. Trans. **8**. p. 287. 1847.

12) Stefan, Wien. Ber. **46**. II. Abth. p. 8. 1862.

13) Poiseuille, Mém. Sav. Étrang. **9**. p. 433. 1846; Ann. de chim. et de phys. (3) **7**. p. 50. 1843.

14) Hagen, Abh. d. Berl. Acad. 1854. p. 17.

15) Stokes, l. c.

(Neumann, G. Wiedemann, Hagenbach, Stefan, v. Helmholtz) hinlänglich discutirt worden ist. Es gelang Meyer<sup>1)</sup>, indem er die Versuche von Graham interpretirte, später zum Theil in Gemeinschaft mit Springmühl<sup>2)</sup> die sicheren Resultate für die thermischen Verhältnisse der Gaszähigkeit zu erhalten. Seitdem haben sich, sowohl durch Vervollkommnung des Apparates, sowie der Methoden Puluj<sup>3)</sup>, v. Obermayer<sup>4)</sup>, E. Wiedemann<sup>5)</sup>, Warburg<sup>6)</sup> und besonders Schumann und Holman<sup>7)</sup> um die weitere Bearbeitung des Gegenstandes mit Erfolg bemüht.

Ich füge hier noch hinzu, dass, wie man einerseits die Strömungsverhältnisse den obigen Arbeiten gemäss bei wirklichen (langen) Capillaren kennt, man ebenfalls mit Navier<sup>8)</sup> den Ausfluss bei sehr kurzen Röhren als theoretisch gegeben ansehen kann. Complicirter und noch verhältnissmässig wenig bearbeitet ist der Gegenstand bei Röhren zwischenliegender Dimensionen. Doch haben Guthrie<sup>9)</sup> und besonders O. Reynolds<sup>10)</sup> und Hoffmann<sup>11)</sup> für diese Fälle eingehende Untersuchungen angestellt.

Die vorliegenden Arbeiten beziehen sich hauptsächlich auf niedere Temperaturen. Allerdings ging v. Obermayer in seinen späteren Arbeiten (Bleicapillaren) bis 280°. Holman untersuchte bei Kohlensäure bis 224° und bei Luft bis 124°. E. Wiedemann bediente sich der Dampfbäder des Wassers (100°) und des Anilins (185°). Sollen aber die thermischen Verhältnisse der Gaszähigkeit weiter erörtert werden, sollen eventuell die Resultate als sogar zu pyro-

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **127**. p. 367. 1866.

2) Meyer u. Springmühl, Pogg. Ann. **148**. p. 503. 1873.

3) Puluj, Wien. Ber. **69**. p. 287. 1874; **70**. p. 243. 1874.

4) v. Obermayer, Wien. Ber. **71**. p. 281. 1875; **73**. p. 433. 1876.

5) E. Wiedemann, Fortschr. d. Phys. **32**. p. 206. 1876.

6) Warburg, Pogg. Ann. **159**. p. 403. 1876.

7) Holman, Proc. Am. Acad. **12**. p. 41. 1876; **21**. p. 1. 1886.

8) Navier, Mém. Ac. Roy. de Sc. **9**. p. 336. 1830.

9) Guthrie, Phil. Mag. (5) **5**. p. 433. 1878.

10) Reynolds, Roy. Inst. of Great Brit. 1884. p. 1; Beibl. **10**. p. 217. 1886.

11) Hoffmann, Wied. Ann. **21**. p. 470. 1884.

metrischen Zwecken verwendbar werden, so ist es geboten, das Temperaturintervall über 300° hinaus, soweit als möglich in das Gebiet der Weissglühhitze hinein, auszudehnen. Man muss eben versuchen, einerseits die Molecularaggregation<sup>1)</sup>, andererseits die Dissociation vermeidend, dem Zustand des vollständigen Gases näher zu kommen. Diese Aufgabe habe ich mir gestellt.

## II. Transpirationen, welche dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz genügen.

### Apparate.

3. Die grosse Vollkommenheit, welche Prof. R. H. Richards<sup>2)</sup> in seinen hydraulischen Saugapparaten erreicht hat, liesse die Anwendung derselben, z. B. wie durch Holman, bei Versuchen dieser Art als wünschenswerth erscheinen. Ich zog es jedoch vor, mit Quecksilberüberdruck zu arbeiten, hauptsächlich deswegen, weil sich dadurch absolute Bestimmungen leichter ausführen lassen, und weil man im Stande ist, die Gasmasse sowohl vor dem Eintritt, wie nach dem Austritt aus der Capillare zu messen. Es lässt sich also über den Verlauf des ganzen Versuches eine Uebersicht erzielen.

In meinem Apparate tritt das Gas bei einem gegebenen constanten, zwischen 1 bis 2 Atmosphären gelegenen Druck ein und fliesst nahezu bei Atmosphärendruck ab. Der Apparat selbst hat Aehnlichkeit mit der Quecksilberluftpumpe und besteht wesentlich aus zwei grösseren, mit starkem Schlauch verbundenen Behältern. Von diesen war dem einen (Gasbehälter) eine feste, mittlere Lage gegeben. Der andere liess sich an demselben Stativ auf und nieder bewegen und in beliebiger Lage tief oder hoch befestigen. Ist der feste Recipient mit trockenem Gas gefüllt, enthält der obere Recipient hingegen eine auf dieses Gas drückende Quecksilbermasse, so fliesst das Gas bei geöffneten Hähnen

1) Natanson, Wied. Ann. **33**. p. 683. 1888.

2) R. H. Richards, Amer. Journ. (3) **8**. p. 200. 1879; Trans. Amer. Inst. Mining Engineers **6**. p. 492. 1879.

des ersteren durch die Capillare unter messbaren Bedingungen aus. Es ist indess nöthig, hier auf einige wichtige Einzelheiten aufmerksam zu machen. Zuerst handelt es sich darum, den Druck hinlänglich constant zu erhalten. Zu diesem Zwecke fungirt der obere Behälter als Mariotte'sche Flasche besonderer Art; während das Quecksilber durch den U-förmig hängenden Schlauch langsam, fast tropfenartig vom Scheitelpunkt des unteren Recipienten in denselben hineinfällt. Das untere Niveau der Säule bleibt daher bis zur Gasentleerung, resp. Quecksilberfüllung genügend constant. Der Gebrauch der Mariotte'schen Flasche bei schwerer Flüssigkeit erheischt grössere Vorsicht. Indessen lässt sich dieselbe doch verwenden, wenn man die verticale, in die Flüssigkeit eintauchende Röhre unten capillar auszieht, sehr schräg und scharf abschleift, dass die Luft gewissermassen durch einen feinen seitlichen Spalt in ganz kleinen Bläschen tönend hineintritt. Besser noch bewährt sich eine Anzahl solcher Risse von gleicher Höhe.

Um die Constanz des Druckes im Gasbehälter zu controliren, resp. den Druck zu messen, ist daselbst ein offenes, mit Kathetometer abzulesendes Quecksilbermanometer angebracht. Auch sind Sperrvorrichtungen vorhanden, vermittelt welcher der besagte Behälter nach der Entleerung wieder mit getrocknetem Gas gefüllt werden kann, während das Quecksilber zur Mariotte'schen Flasche zurückfliesst. Der Versuch kann also beliebig oft wiederholt werden; zugleich fliesst bei jedem Versuche das in dem unteren Behälter enthaltene Luftquantum, resp. ein bestimmter Theil desselben bei bekannten Druck- und Temperaturverhältnissen durch die Capillare.

Es wäre noch der Lage des Thermometers etc. im Gasbehälter zu gedenken. Doch kann ich die weitere Beschreibung des dem arbeitenden Physiker leicht verständlichen Apparates übergehen. Ich füge noch hinzu, dass nach vollendeter Construction Druckänderungen sich kaum mehr am Manometer nachweisen liessen. (Vgl. die Tabellen.)

4. Von grösserem Belang ist die Beschreibung des Capillarapparates. Derselbe ist in den Figuren 1 und 2 in Vertical- und Horizontalschnitt dargestellt. Stativ und der-



gleichen sind weggelassen. Vorausschicken möchte ich, wie bereits angedeutet, dass man den Apparat zur Ausführung der Zähigkeitsmessungen in dreierlei Weise gebrauchen kann: 1. durch Ermittlung der Ausflusszeit gegebener Volumina Gas im Gasbehälter durch die Capillare (Messungen vor der Capillare); 2. durch Ermittlung der Volumina, welche in gegebenen Zeiten die Capillare verlassen (Messungen hinter der Capillare); 3. durch Differentialmessungen, gleichzeitig bei je zwei Temperaturen. Von diesen Methoden ist die erste im allgemeinen nicht so bequem wie die zweite, weil die Volumina im Behälter gross sind, und bei hohen Temperaturen die Zeiten enorm anwachsen können (5 Stunden). Ich habe mich daher hauptsächlich der zweiten Methode bedient, während die erste und dritte zur Controle herbeigezogen wurden.

Das durch den Hahn *k* (Fig. 1 und 2) ankommende comprimirt Gas durchfliesst die Röhre *g*, dann die spiralförmig zu einer Spule gewundene Platincapillare *I* und wird beim Ausfliessen in der in die pneumatische Wanne *MM* tauchende, mit Wasser gefüllten graduirten Röhre *III* aufgefangen. Diese Röhre, in welcher das zwischen Oeffnen und Schliessen des Hahnes *k* ausgeflossene Gas zu messen ist, hat ca. 50 ccm Inhalt. Vor Ablauf der Beobachtung saugt man vermöge des Hahnes *O* Wasser aus der Wanne *MM* in die Röhre *III* bis zur Füllung hinein, und der Versuch kann dann von neuem beginnen. Um Temperaturconstanz zu erzielen, ist *III* mit einer Glasröhre *iii* umgeben, in welche möglichst schnell circulirendes Wasser aus der Wasleitung bei *p* eintritt und bei *X* wieder ausfliesst. Am Anfange ist natürlich auch *iii* mit Wasser zu füllen. Dazu dient das schliessbare Seitenrohr *g*. Es lässt sich bewerkstelligen, dass selbst bei heftiger Weissgluth der Capillare *I* sich die Temperatur des Wassers in *iii* kaum merklich ändert. Asbestschirme werden trotzdem möglichst zweckmässig angebracht.

5. Die Capillare *I* besteht aus zwei oder mehreren ziemlich eng nebeneinander gewundenen Platinröhren *bb*, wie dies in Fig. 3 schematisch angedeutet ist. Jedoch ist die Spule hohl, um den feuerfesten Thonisolator *t* des Thermo-

elementes  $\alpha\beta$  knapp aufnehmen zu können. Der untere Theil des Spulencanals  $c$  ist mit Asbestwolle verstopft. Die vorderen Enden der Capillare sind in einen in die kalte Glasröhre  $g$  eingekitteten Messingcylinder  $h$  eingelöthet. Ferner sind die durch die Blechwand des Troges  $MM$  tretenden Theile der Capillare an der Innenseite angelöthet. Man muss sich aber sorgfältig davor hüten, dass kein Loth auf die zu erwärmenden Theile der Capillare kommt. Sonst wird dieselbe beim Erhitzen zerstört. Ueberhaupt erheischt das Löthen die allergrösste Vorsicht, damit die Canäle nicht beschädigt werden.

Die Herstellung der Capillaren ist mit Schwierigkeiten verknüpft. Für Kupferröhren ist bereits von Regnault<sup>1)</sup> ein Verfahren angegeben, dessen man sich mit Erfolg bedienen kann. Es werden dicke Kupferstäbe der Länge nach durchbohrt und in die weite Durchbohrung Wood'sches Metall gegossen. Man rollt und zieht dann die Stäbe zu feinen Drähten aus und schmilzt schliesslich, zugleich unter Druck, das leicht flüssige Metall aus dem feinen Canal heraus. Die so erhaltenen Röhren sind oft gut, doch misslingen die Versuche leicht bei irgendwie schief laufendem Zug.

Platin- und Silbercapillaren lässt man sich zweckmässiger von geschickten Platinkünstlern direct ziehen. In folgender Tabelle habe ich die Dimensionen der von mir gebrauchten Röhren zusammengestellt. Es sind dies Stücke der etwa in 150 cm Länge gezogenen Capillaren.

Nr.	Länge	Aeusserer Radius	Innerer Radius
	cm	cm	cm
1	51	0,057	0,026
2	43	0,057	0,028
3	41	0,057	0,028
4	44	0,057	0,028
5	51	0,057	0,026 etc.

Solche Röhren lassen sich dann durch weiteren Zug, inwendig und auswendig beliebig verjüngen. Darüber geben die Tabellen weiteren Aufschluss.

Es sei hier noch einiges über den Differentialapparat (Fig. 2) erwähnt. Derselbe hat Aehnlichkeit mit dem

1) Regnault, Relat. des Expériences 1. p. 264. 1847.

Differentialgalvanometer. Es werden unter sonst identischen Umständen die Transpirationsvolumina durch zwei nebeneinander liegende Capillarspulen, von denen die eine heiss, die andere kalt erhalten wird, beobachtet. Ein Seitenrohr  $vI'$  der Röhre  $gh$  führt zur kalten, von dem Wasser des Troges  $MM$  umspülten Capillare  $I'$ . Die Messröhre  $I'I'$  ist in angegebener Weise mit dem Wassercylinder  $i'i'$  umgeben. Im allgemeinen sind die Capillaren  $I$  und  $I'$  nebst pneumatischem Zubehör so weit wie möglich identisch.

7. Schliesslich sind die Erhitzungsmethoden der Capillare  $I$  zu erwähnen. Zur Erhaltung niedriger Temperaturen umspült man  $I$  mit kaltem Wasser aus der Wasserleitung. Die Temperatur  $100^{\circ}$  wird durch einen in einer schlechtleitenden Röhre rasch circulirenden Dampfstrom gegeben. Sehr constante Temperaturen bei etwa  $1000^{\circ}$  erhält man durch Erhitzung der Platinspirale in einem mit Schornstein versehenen Bunsen'schen Brenner. Durch Einführung eines regelmässigen Luftgebläses kann man die Temperatur bis  $1300^{\circ}$  und darüber steigern. In diesen Fällen ist die Spirale  $I$  mit einem cylindrischen, hinten eingeschnittenen Asbestschornstein zu umgeben. Denselben erhält man, indem man durchnässte Asbestpappe um einen Holzcylinder rollt und trocknen lässt. Ueberhaupt sind dicke Asbestschirme überall zweckmässig anzubringen. Die directe Erhitzung der Spirale ist verwerflich. Ich habe sie daher mit einer cylindrischen Umhüllung von Glimmer versehen, wodurch unter anderem auch die Constanz der Temperatur innerhalb der Platinmasse bedeutend befördert wird.

Grosse Schwierigkeiten hingegen ergaben sich bei der Herstellung genügend constanter Temperaturen zwischen  $300$  und  $1000^{\circ}$ . Nach vielen vergeblichen Versuchen verwandte ich schliesslich mit Erfolg die Luftsäule im Cylinder einer gewöhnlichen Argand'schen Petroleumlampe. In Fig. 1 ist bei  $NN'$  die Lage dieses Cylinders (Schornsteins) angedeutet. Je höher man im Cylinder beobachtet, um so geringer werden die Temperaturen, während die Constanz einer gegebenen Zone, nachdem einmal die Lampe völlig erwärmt ist, sich für die vorliegenden Zwecke befriedigend erweist. Für niedere Temperaturen wird man also neben der Verkleine-

rung der Flamme den Cylinder durch Anfügung weiterer verticaler Glasröhren beliebig verlängern. Für höhere Temperaturen umwickelt man die tiefer gelegenen Zonen mit Asbestpapier. Geschieht dies allzunahe der Flamme, so schmilzt der Cylinder sogar zusammen. Folgende Angaben der Temperaturen ( $\theta$ ) der inneren Luftsäule bei verschiedenen mittleren Höhen ( $h$ ) über der Flamme wird das Gesagte erläutern:

$h = 18$	18	18	18 cm	} Kleine Flamme.		
Zeit = 0	7	14	21 m			
$\theta = 414$	416	421	423 °			
$h = 17$	6	6	6 cm	} Grössere Flamme.		
Zeit = —	10	20	30 m			
$\theta = 669$	681	685	695 °			
$h = 11$	11	17	17	6	6 cm	} Grosse Flamme.
Zeit = 25	30	40	60	63	69 m	
$\theta = 904$	904	825	825	956	956 °	

Ausser dem Vortheil eines grösseren Temperaturintervalles ist noch der zu erwähnen, dass man es hier mit einem Luftbad zu thun hat. Bei höheren Temperaturen ist Gefahr vorhanden, dass bei directer Flammenerhitzung Gase des Brenners durch das glühende Platin dringen (s. w. u.).

8. Zur Temperaturmessung bediente ich mich eines oder mehrerer, direct mit dem Porzellanluftthermometer vergleichener Thermoelemente aus Platin und Platiniridium. Leider muss ich auf eine eingehende Beschreibung der Ausführung dieser, für die vorliegende Arbeit hochwichtigen Aufgaben verzichten.<sup>1)</sup> Ich bemerke nur, dass die von mir gebrauchten Porzellanballons am Boden eingestülpt sind, und zwar so, dass sich eine enge cylindrische (Durchmesser 0,6 cm), in den Ballon hineinragende, innen geschlossene Porzellanröhre bildet. In diese wird das Thermoelement gesteckt, wodurch die Löthstelle nahe dem Centrum des Ballons zu liegen kommt. Als Isolatoren für die Drähte dienen lange, dünne Stäbe aus feuerfestem Thon (Durchmesser 0,45 cm), innerhalb welcher zwei parallele, die Platindrähte enthal-

1) Das in Kürze erscheinende Bulletin der U. S. Geological Survey, Nr. 54, über die Messung hoher Temperaturen, wird über besagte und verwandte Gegenstände ausführlichen Bericht ertheilen.

tende Canäle in der Längsrichtung laufen. Ferner ist der Ballon von einer sphärischen, rotirenden, feuerfesten Muffel umgeben, durch deren Hohlraum einerseits die aussen festgeklebten Isolatoren, andererseits der ebenfalls aussen festgeklebte Stiel des Luftthermometers hindurchgehen. Schliesslich ist die Muffel mit den dicken Thonwänden des nahezu sphärischen Ofens umgeben. Zwei kräftige, parallele, jedoch nach der Art eines Kräftepaares in den Ofen eingesetzte, mit Gebläse gespeiste Gasbrenner blasen in ein um die Verticale rotirendes Flammenrohr. In diesen Wirbel taucht dann die Muffel bei ihrer Rotation um die Horizontale bis über die Hälfte hinein. Es ergibt sich auf diese Weise eine befriedigende Temperaturconstanz, die von niederen Werthen (200°) bis zur heftigen Weissgluth gesteigert werden kann.

Man erhält so zwischen Luftthermometer und Thermo-  
element über sehr grosse Intervalle ausgedehnte Temperatur-  
vergleichen, die bei verschiedenen Reihen von Beobach-  
tungen sehr gut untereinander übereinstimmen.

Zu bemerken ist noch, dass die Data wiederholt mit  
hohen Siedepunkten (Zink und dergl.) controlirt wurden.

#### Berechnung.

9. Die auf vorliegende Arbeit bezüglichen Gleichungen  
hat Hr. O. E. Meyer<sup>1)</sup> in zwei Formen gegeben. Man hat  
erstens:

$$(1) \quad u = \frac{P^2 - p^2}{8\eta L p} \{R^2 - r^2 + 2\zeta R\},$$

wo  $u$  die Geschwindigkeit eines Gastheilchens im Abstände  
 $r$  von der Axe einer Capillare, von der Länge  $L$  und dem  
inneren Radius  $R$  bedeutet;  $P$  und  $p$  die an den Enden  
wirkenden Drucke,  $\eta$  die Zähigkeit,  $\zeta$  der Gleitungscoëffi-  
cient des Gases sind. Die zweite Form folgt durch In-  
tegration aus der ersten und ergibt als neue Variable das  
Gasvolumen  $V_1$ , welches durch irgend einen Querschnitt der  
Röhre unter dem Drucke  $p$  in der Zeit  $t$  transpirirt. Dem-  
nach ist:

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 269. 1866.

$$(2) \quad V_1 = \frac{\pi l}{16 \eta} \frac{P^2 - p^2}{p_1} \frac{R^4}{L} \left( 1 + 4 \frac{\zeta}{R} \right).$$

Soll diese Gleichung zu absoluter Bestimmung des  $\eta$  benutzt werden, so hat man zu beachten, dass  $(P^2 - p^2)/p_1$  gewöhnlich in Quecksilberhöhen ausgedrückt wird; dass folglich der Factor  $\delta g$ , wo  $\delta$  die Dichte des Quecksilbers, der rechten Seite von (1) beizufügen ist. Dann ergibt sich für  $\eta$ , mittelst (2) berechnet, die Dimension  $[m l^{-1} T^{-1}]$ , also identisch mit dem Maxwell'schen  $\eta = 0,318 \varrho \Omega L$  der kinetischen Gastheorie. Ferner zeigt (2), dass die Dimension des  $\zeta$  linear ist, wie ebenfalls, da  $\zeta$  vermuthlich der mittleren freien Weglänge proportional sein muss, aus der Gastheorie folgt. Sollen die Gleichungen (1) und (2) auf die Temperatur im Anfangsquerschnitt Bezug haben, so ist zu beachten, dass  $p = k \varrho (1 + \alpha \theta)$ , worin  $\varrho$  die Dichte,  $\theta$  die Temperatur bedeuten, welche dem Druck  $p$  entsprechen, und  $k, \alpha$  die Constanten des Boyle-Charles'schen Gesetzes sind. Noch zu bemerken wäre, dass bei der Ableitung von (1) und (2)  $p$  und  $\varrho$  unabhängig von  $r$ ,  $\eta$  unabhängig von  $P$  angesehen werden; ferner ist vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten von  $u^2$  und  $\partial u / \partial x$ , also  $u \partial u / \partial x$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$ ,  $\partial^2 u / \partial x \partial r$ , wo  $x$  längs der Axe gemessen wird, der Null sehr nahe kommen. Die Bedingungen erfordern also ein möglichst langsames, ruhiges Fließen. Analoge Gleichungen gelten bei elliptischen Querschnitten.

10. Die Gleichung (2) ist nur für den Fall obiger Apparate anzuwenden, in welchen die kurzen Enden der Capillare gewöhnlich eine niedrigere Temperatur als die mittleren Theile besitzen. Ich will hier gleich einfügen, dass ein Apparat, in welchem die ganze Capillarlänge dieselbe Temperatur haben soll, nicht schwer zu ersinnen ist. Man muss zu diesem Zwecke die Enden der Capillarröhre in Platinröhren von verhältnissmässig grossem Durchmesser einfügen. Dabei erzielt man etwa dasselbe, wie bei bei Löthung eines dünnen Widerstandsetalons an dicke Kupferelectroden. Ein solcher Platincapillarapparat würde sich aber zu den Zwecken dieser Arbeit gar nicht eignen. Man will hier eben die Möglichkeit behalten, die Capillaren in Bezug auf Caliberlänge und Zahl derselben im

im Bündel, ohne zu grosse Mühe abändern zu können, was bei einem Apparat von vollendeterer Construction nur unter grossem Zeitverlust und Kostenaufwand möglich wäre. Für eine in das schwierige Thema dieser Arbeit einführende Untersuchung ist also der obige Apparat (Fig. 1 u. 2) ganz besonders geeignet, und es handelt sich nur darum, die Correctionen wegen Temperatur ebenfalls an den Enden anzubringen.

Es mögen, wie oben,  $R, L, \theta, t$ , Radius, Länge, Temperatur und Zeit bedeuten. An der Stelle einer einzigen hat man nunmehr drei ineinander laufende Capillaren von der Länge  $l' l'' l'''$ , wobei  $L = l' + l'' + l'''$ . Indem man die übrigen Variablen in gleicher Weise accentuirt, ergibt sich folgendes Schema:

$$P, V', R', l', \theta', t' \eta' \text{ etc.}, \quad p' V'', R'', l'', \theta'', t'' \eta'', \\ p'' V''', R''', l''', \theta''', t''' \eta''' \text{ etc. } p.$$

Nun ist aber  $l'$  und  $l'''$  klein gegen  $l''$ ; ebenfalls  $\theta'$  und  $\theta'''$  klein gegen  $\theta''$ . Ferner ist bei obigem Apparate einfacher  $R' = R'' = R$ ;  $\eta' = \eta''' = \eta$ ;  $\theta' = \theta''' = \theta$ . Schliesslich ist  $V' \rho' = V'' \rho'' = V''' \rho''' = V \rho$ ;  $t' = t'' = t''' = t$ . Die Anwendung der Meyer'schen Gleichung ergibt also:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} P^2 p^2 &= V k \rho (1 + \alpha \theta) \frac{16}{\pi t} \left\{ \frac{\eta}{R (1 + 4 \zeta / R)} (l' + l''') \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \alpha \theta''}{1 + \alpha \theta} \frac{\eta''}{R'' (1 + 4 \zeta'' / R'')} l'' \right\}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man dann  $R'' = R_0'' (1 + \beta \theta'')$  und  $R = R_0$ , so ist schliesslich:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\eta''}{1 + 4 \zeta'' / R''} \\ &= \left\{ \frac{\pi P^2 - p^2}{16} \frac{t}{p} \frac{R_0''^4}{V l''} - \frac{\eta}{1 + 4 \zeta / R} \left( \frac{R_0''}{R_0} \right)^4 \frac{l' + l'''}{l''} \right\} \frac{1 + \alpha \theta}{1 + \alpha \theta''} (1 + \beta \theta'')^4. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung lässt sich für jeden speciellen Fall weiter vereinfachen. In obigem Apparat ist  $R_0'' = R$ . Es ist daher nothwendig,  $(l' + l''')/l''$  klein zu machen, oder sonst  $l'$  und  $l'''$  möglichst genau zu messen. Ich habe durch den Gebrauch stark fliessenden Wassers in der angegebenen Weise die heissen und kalten Theile der Capillare nahe beisammen liegend einfügen können. Auch ist  $\eta$  klein gegen  $\eta''$ , weil grosse Temperaturintervalle zur Anwendung kommen.



Ich bemerke dabei, dass infolge des Factors  $(R_0''/R_0)^4$  man das Correctionsglied durch Anwendung von Endröhren von grösserem Durchmesser sehr rasch zum Verschwinden bringen kann. Ist  $\theta = \theta''$ , also  $\eta = \eta''$ , so fällt (4) mit (2) zusammen, angenommen natürlich, dass  $R_0'' = R_0$  sei.

11. Ich will hier noch in kürze den analogen Fall für den Differentialapparat § 6 berühren. Für die heisse Capillare hat man obige Gleichung (4); für die kalte Capillare hingegen einfacher (bei entsprechender Bezeichnung):

$$\frac{\eta}{1 + 4\zeta/R_c''} = \frac{\pi P^2 - p^2}{18} \frac{t_c}{p} \frac{R_c^4}{V_c L_c},$$

wodurch nahezu:

$$(5) \quad \frac{\frac{\eta''}{1 + 4\zeta''/R''}}{\frac{\eta}{1 + 4\zeta/R_c}} = \left\{ \frac{t}{t_c} \frac{V_c L_c}{V l''} \left( \frac{R_c''}{R_c} \right)^4 - \left( \frac{R_0'}{R_0} \right)^4 \frac{l + l''}{l''} \right\} \frac{1 + \alpha \theta}{1 + \alpha \theta''} (1 + \beta \theta'')^4.$$

Sind die beiden Spiralen identisch in Bezug auf Caliber und Länge, sind ferner (erster praktischer Fall) die Zeiten einander gleich, also  $t = t_c$ ,  $L = L_c$ ,  $R_0'' = R_0 = R_c$ , dann ist:

$$(6) \quad \left\{ \frac{\frac{\eta''}{1 + 4\zeta''/R''}}{\frac{\eta}{1 + 4\zeta/R}} = \frac{1 + \alpha \theta}{1 + \alpha \theta''} \frac{V_c/V - (l' + l'')/L}{1 - (l' + l'')/L} (1 + \beta \theta'')^4. \right.$$

Andererseits, falls, wie oben,  $R_0'' = R_0 = R_c$ ,  $L = L_c$ ; wobei aber (zweiter praktischer Fall) dieselben Volumina in den Zeiten  $t$  und  $t_c$  transpiriren, gilt ähnlich:

$$(7) \quad \left\{ \frac{\frac{\eta''}{1 + 4\zeta''/R''}}{\frac{\eta}{1 + 4\zeta/R}} = \frac{1 + \alpha \theta}{1 + \alpha \theta''} \frac{t/t_c - (l' + l'')/L}{1 - (l' + l'')/L} (1 + \beta \theta'')^4. \right.$$

Ist  $\theta = \theta''$ , so ergibt sich aus (5) eine einfache Relation für das Radienverhältniss. Ist  $t = t_c$ , so gilt:

$$(8) \quad (R''/R_c)^4 = VL/V_c L_c,$$

ein oft brauchbares Resultat.

#### Beobachtungen.

12. Anfangs habe ich die (grossen) Gasvolumina vor dem Eintritt in die Capillare gemessen, in der Folge jedoch



zweckmässiger kleinere Volumina nach dem Austritt aus der Capillare bestimmt. Die Einzelheiten der Manipulation muss ich hier übergehen, obgleich sich manches beachtenswerthe dabei ergab.

Die angewandten Gase, Luft und Wasserstoff, wurden in gewöhnlicher Weise durch Schwefelsäure und Chlorcalcium getrocknet. Wasserstoff entnahm ich einem geräumigen Gasometer. Von einer weiteren oder vollständigeren chemischen Reinigung dieser Gase habe ich abgesehen. Es kommt mir einstweilen nur darauf an, die Möglichkeit eines identischen Gesetzes bei zwei genügend verschiedenen permanenten Gasen experimentell zu prüfen, andererseits auch in die Versuche selbst eine weitgehende Variation hineinzubringen. Dies wird eben bei dampffreien Gasen irgend welcher, voneinander verschiedener Art, deren Eigenschaften man vor jeder Versuchsreihe bestimmt, erreicht.

13. Bezüglich der Nomenclatur in den Tabellen halte ich mich an den vorausgehenden Abschnitt. Es sei noch folgendes erwähnt:

$P$  ist der Druck, unter welchem das Gas in die Capillare eintritt, also die Normalhöhe des Quecksilbers im Manometer, vermehrt um den corrigirten Barometerstand.

$p$  ist der Druck, unter welchem das Gas die Capillare verlässt; also gleich dem Barometerstand vermehrt um den Quecksilberwerth der Tiefe der capillaren Ausflussröhren, unter dem Wasserniveau im Trog (Fig. 1). Es wäre noch eine Correction wegen Capillarreaction des Wassers gegen die Blasenbildung an der Röhrenöffnung anzubringen. Da sich diese schwer bestimmen liess, zog ich es vor,  $P$  so gross zu wählen, als es sich mit einer hinreichend langsamen Strömung vereinbaren liess.

$t$ , das Zeitintervall, welches dem Gasvolumen  $V_0$  entspricht, ist gewöhnlich nahezu constant zu wählen. Oeffnung und darauffolgende Schliessung des Hahnes  $k$  (Fig. 1), durch welche  $t$  bestimmt wird (mir stand ein gutes Bröcking'sches Chronometer zu Gebote), lässt sich wohl mit einem Fehler, der 0,2 Secunden nicht übersteigt, bewerkstelligen.

$V_0$ , das Volumen des trockenen Gases, welches bei Normaldruck (76 cm) und 0° C. abfliesst, ist die eigentliche Variable

dieser Versuche. Zur Reduction der nass gemessenen Volumina  $V$  auf Null und Trockenheit eignen sich die Landoldt-Börnstein'schen Tabellen vortrefflich, wobei zu beachten ist, dass das beobachtete  $V$  unter Atmosphärendruck vermindert um den Quecksilberwerth der übrigbleibenden Wassersäule in *III*, Fig. 1, gemessen wird. Auch ist eine Correction wegen Löslichkeit des Gases im Wasser anzubringen, welche bei Luft und lufthaltigem Wasser zu vernachlässigen ist, bei Wasserstoff aber 2 Proc. betragen kann. Nun wird in der Gleichung (4)  $V$  bei gegebenem  $\Theta$  und  $p$  verlangt. Falls man daher  $V$  tabellarisch auf  $V_0$  reducirt, so ist es bequem, die genannte Gleichung in die folgende angenäherte Form umzuwandeln:

$$\frac{\eta''}{1+4\frac{\eta''}{R''}} = \left\{ \frac{\pi}{16} \frac{P^2 - p^2}{76} \frac{t''}{V_0} \frac{R''^4}{l''} - \frac{q}{1+4\frac{\eta''}{R}} \left( \frac{R_0'''}{R_0} \right)^4 \frac{l' + l'''}{l''} \right\} \frac{(1 + \beta \Theta'')^4}{1 + \alpha \Theta''},$$

worin auf ein kleines  $\Theta$  Rücksicht genommen ist.

Schliesslich ist  $V$  wegen der residuellen Luft in dem Rohr  $gh$  (Fig. 1) und der Schliessung zu corrigiren. Vorerst ist natürlich  $gh$  durch Einführung eines Glasstabes und dergleichen zu verkleinern. Es sei nun  $v$  das Restvolumen in  $gh$ ; ferner entspreche  $V$  der Zeit  $t$  zwischen Oeffnen und Schliessen des Hahnes  $k$ . Bei der Beobachtung misst man also factisch  $a = V + v$ . Hätte man in der Zeit  $t$  den Hahn  $n$  einmal ohne Zeitverlust geöffnet und geschlossen, so würde  $b = V + nv$ , abgelesen werden. Also ist  $b - a = (n - 1)v$ , aus welcher oder analogen Gleichungen man  $v$  bestimmt.

$\Theta$  ist die Temperatur der kalten capillaren Enden und des Wassers im Trog, gemessen durch ein in denselben eintauchendes Thermometer.

$\Theta''$ , die Temperatur des heissen Theils der Capillare, welche, wie bereits angeführt, thermoelectrisch gemessen wird. Hierüber wird weiteres der jedesmaligen Tabelle vorausgeschickt. Ich habe eben meine Versuche durch allmähliche Verbesserung der  $\Theta''$ -Messung vervollkommen müssen.

Die Messung von  $R$  verursacht endlich die grössten Schwierigkeiten. Man hat es nämlich mit undurchsichtigen Capillaren zu thun. In einigen früheren Versuchen habe

ich allerdings mit Quecksilber gefüllt und die Faden gewogen. Später hielt ich es für gefährlich, Quecksilber in die Metallröhren zu bringen. Ich habe daher den äusseren Radius mit der Mikrometerschraube gemessen und danach aus Wägungen den inneren Radius berechnet. Dies ist jedoch eine rohe Methode, insbesondere da  $R^4$  in die Formeln eintritt. In der Folge habe ich mich überzeugt, dass  $R$  wohl am besten sich durch Transpiration bestimmen lässt, indem man eine durchsichtige Glascapillare von bekannter Innenweite (deren Bestimmung sich ja genau ausführen lässt) mit der Platincapillare vermöge des Differentialapparates § 6, 11 vergleicht. Auch lässt sich  $R$  volumenometrisch messen.

Es sind also meine absoluten Werthe von  $\eta''$  und  $\eta_0$  mit dem grossen Fehler des  $R$  behaftet. Da dieser aber überall gleichmässig auftritt, kommt darauf, soweit es meine Hauptzwecke betrifft, weniger an. Ich bezweifle überhaupt, ob man mit Metallcapillaren scharfe absolute Werthe erreichen kann; denn der Radius wird niemals, weder in jedem Querschnitt, noch der Länge nach, identisch sein. Das für hohe Temperaturen nothwendige Aufrollen der Röhren verursacht Verflachung in radialer Richtung. Auch kann man nicht sicher sein, ob sich nicht im Innern hier und da beim Zug feine Metallfasern losgelöst haben, die den Canal etwas verengen. Dadurch werden aber die relativen Werthe, und besonders die im Auge zu behaltenden pyrometrischen Anwendungen, wenig beeinträchtigt.

14. In den folgenden Tabellen habe ich meine letzten (6) Versuchsreihen mitgetheilt. In allen ist die Function:

$$F(\Theta'') = \frac{\frac{\eta''}{1 + 4 \frac{\eta''}{\zeta} / R''}}{\frac{\eta}{1 + 4 \frac{\eta}{\zeta} / R}}$$

das Hauptergebniss. In den Tab. 1 und 2 hat das Thermoelement die Anordnung, welche in Fig. 3 darstellt ist, und zwar ist hier die Platincapillare noch nicht mit einer Glimmerkapsel umkleidet. Graphisch dargestellt sind diese Resultate in Fig. 5, und zwar sind die Punkte für Luft nach oben, die Punkte für Wasserstoff nach unten gestrichelt.

Tabelle 1. Zähigkeit des Wasserstoffs.  
 Platincapillarröhre Nr 10,  $L = 33,43$  cm,  $l' + l'' = 4,4$  cm.  
 $\eta_0 = 0,000\ 141\ 6$   $\theta = 6^\circ$   $R = 0,0079$  cm.

$P$	$p$	$l''$	$V_0$	$\theta''$	$\frac{\eta''}{1 + 4 \frac{l''}{R}} \times 10^6$	$F(\theta'')$
cm	cm	sec	ccm	° C.	m/lt	
123,97	75,66	95	51,38	6	142,7	—
123,97		90	48,73		142,6	—
123,97		90	48,70		142,7	—
123,97		90	48,80		142,4	—
123,98		90	48,78		142,5	—
123,82	75,66	90	48,33	6	143,2	—
123,83		90	48,37		143,1	—
123,81		90	48,42		142,9	—
123,83		90	48,37		143,1	—
123,85		90	48,39		143,1	—
123,83	75,60	90	48,37		143,1	—
123,88		440	50,64	482	281,3	1,986
123,90		440	49,83	490	283,1	1,999
123,92		440	49,64	490	284,2	2,007
123,92		440	49,61	504	286,7	2,021
123,92	75,62	440	49,89	511	287,4	2,030
123,67		630	50,63	671	324,4	2,291
123,68		660	50,96	695	330,7	2,336
123,64		660	50,23	705	332,0	2,345
123,64		680	50,93	715	334,0	2,359
123,85	75,72	660	51,75	688	329,5	2,327
123,85		660	51,55	691	329,9	2,330
123,85		660	50,95	700	330,6	2,335
123,85		660	50,14	707	333,6	2,356
121,75		1115	50,82	985	416,2	2,939
121,73	76,25	1115	50,77	985	416,5	2,941
124,64		1080	50,82	1010	423,1	2,987
124,63		1080	50,73	1010	423,7	2,992
124,81		1080	51,10	1007	423,7	2,992
124,83		1080	51,19	1005	423,8	2,993
124,84	76,32	1080	51,21	1006	423,4	2,990
124,65		1560	51,24	1222	525,4	3,710
124,64		1560	51,26	1227	518,9	3,660
124,65		1560	51,45	1224	522,8	3,692
124,79		1560	52,23	1223	517,6	3,655
124,31	76,35	90	47,52	5	146,4	—
124,31		95	50,56		145,3	—
124,31		95	50,85		144,4	—
124,31		95	50,96		144,1	—
124,31		95	50,96		144,1	—
123,9	76,37	95	50,51	5	144,1	—
123,9		95	50,50		144,2	—
124,0		95	50,47		144,4	—
124,0		95	50,51		144,2	—

Tabelle 2. Zähigkeit von Luft.

Platincapillare Nr. 10.  $L = 33,43$  cm,  $l' + l'' = 4,4$  cm. $\eta_0 = 0,000\,247\,2$   $\theta = 5^\circ$   $R = 0,0079$  cm.

$P$	$p$	$t''$	$V_0$	$\theta''$	$\frac{\eta''}{1 + 4\zeta''/R} \times 10^6$	$F(\theta'')$
cm	cm	sec	cm	°C.	m/tl	
125,24	77,08	165	51,31	5	251,7	—
125,24		165	51,31		251,7	—
125,23		165	51,36		251,4	—
125,23		165	51,46		250,9	—
125,25		165	51,36		251,5	—
125,36		165	51,52		251,4	—
125,08	77,08	165	51,16	5	251,4	—
125,08		165	51,16		251,4	—
125,08		165	51,22		251,1	—
125,08		165	51,22		251,1	—
124,93	76,97	560	50,77	335	438,5	1,774
124,93		780	51,90	473	492,5	1,993
124,95		740	52,20	448	480,5	1,944
124,77	76,80	810	51,83	491	503,5	2,037
124,77		810	51,11	499	505,0	2,043
124,74		880	51,57	536	520,1	2,104
124,73		920	51,43	563	528,5	2,138
124,73		945	51,67	575	533,1	2,157
124,77	76,80	960	51,57	585	537,7	2,175
124,76		980	51,94	595	539,1	2,181
124,04	76,19	1680	50,62	930	691,0	2,796
124,08	76,17	1665	51,42	917	683,6	2,766
124,05	76,13	1665	50,98	919	688,2	2,784
123,97	76,05	1665	51,15	914	688,3	2,785
123,88	75,97	1665	51,61	912	682,2	2,760
123,69	75,79	2780	51,21	1337	859,8	3,479
123,65	75,71	2820	50,87	1337	878,4	3,554
123,64	75,66	2860	50,81	1337	892,5	3,611
123,60	75,62	2880	50,85	1340	896,6	3,627
123,37	75,97	165	50,10	5	250,0	—
123,37		165	49,99		250,5	—
123,37		165	50,15		249,8	—
123,40		165	50,08		250,5	—
123,40		165	50,09		250,3	—

Die Curve zeigt, dass unterhalb  $1000^\circ$  die beiden Gase sich ziemlich gleich verhalten. Dasselbe fand ich in früheren Reihen. Oberhalb  $1000^\circ$  divergiren die Curven, wohl wegen der grösseren Durchdringlichkeit des glühenden Platins für Wasserstoff als für Luft. Infolge der Gasdiffusion durch die Platinwand der Capillare wird also hier der wahre Charakter des  $\eta''/\eta_0$  verdeckt, jedoch nicht in unmessbarer

Weise. Man trifft schliesslich in der Figur bei 1200 bis 1300° Punkte an, die sich decken. Es kommt dies wahrscheinlich daher, dass die nicht registrirten Temperaturen der äusseren Lagen der Capillare noch anwachsen, nachdem die registrirten Temperaturen der inneren Lagen bereits constant sind. Es ist dies ein Fingerzeig in der Richtung weiterer Verbesserungen.

Behufs zusammenhängender Darstellung habe ich die gebräuchliche Function  $(1 + \alpha\theta'')^n$  angewandt. Dabei zeigt sich, dass die Punkte zwischen  $n = 1/2$  und  $n = 3/4$ , sehr nahe der Curve für  $n = 2/3$  gelegen sind. Diese habe ich ausgezogen.

15. Das Ungenügende der Temperaturmessung habe ich in den folgenden Untersuchungen zu beseitigen gesucht. Von Versuchsabänderungen theile ich nur Tab. 3 mit (in Fig. 6 schief gestrichelt eingetragen). Hier wurde sowohl Spirale, wie Thermoelement ohne Umkleidung der Erhitzung ausgesetzt. Dabei wird die Temperatur zu hoch gemessen, während in § 16 die Temperaturen muthmasslich zu klein sind. Natürlich zeigen sich bei nackter Löthstelle bedeutende Temperaturschwankungen, wodurch die Beobachtung unsicher wird. Es liessen sich aber die Punkte nicht bis  $(1 + \alpha\theta'')^{1/2}$  herunterdrücken, obgleich dieselben im allgemeinen unter  $(1 + \alpha\theta'')^{2/3}$  liegen.

Tabelle 3. Zähigkeit der Luft. Vorläufiges.

Platincapillare Nr. 10.  $L = 33,43$  cm,  $l' + l'' = 4,4$  cm.

$\nu_0 = 0,000\ 247\ 2$ .  $\theta = 6^\circ$   $R = 0,0079$  cm.

$P$	$p$	$t''$	$V_0$	$\theta''$	$\frac{\eta''}{1 + 4 \frac{r''}{R}} \times 10^6$	$F(\theta'')$
123,11	75,93	170	51,35	5	249,7	—
123,13		170	51,35		249,9	—
123,15		170	51,40		249,7	—
123,17		170	51,38		250,0	—
123,17		170	51,38		250,0	—
124,29	75,80	1800	51,60	1055	671,6	2,717
124,31		1950	51,60	1040	735,9	2,977
124,30		1845	51,00	1062	693,3	2,805
124,17	75,89	2460	50,96	1347	768,4	3,109
124,22	75,82	2460	50,50	1338	781,3	3,161
124,27	75,79	2460	50,39	1336	785,2	3,177

16. In den nun folgenden Tabellen 4 bis 7 habe ich die Versuche, den § 16 und 17 gemäss, zu verbessern gesucht. Es wurde die innen mit Asbestwolle *c* (Fig. 4) ausgefüllte Capillare *bb* auswendig mit der Glimmerkapsel *aa* umgeben. Ferner gebrauchte ich statt eines einzigen Platin|Platin-Iridiumthermoelementes deren drei. In der Fig. 4 sind bei 1, 2, 3 die Lagen der Löthstellen der mit Glimmer isolirten Drähte angedeutet. Die Pfeile beziehen sich auf den Gang des Gasstromes durch die Capillare.

Auf diese Weise erhalte ich zwei Werthe des  $\theta''$ .  $\theta_1''$  bezieht sich auf die Temperatur der inneren Spulenfläche,  $\theta_2''$  auf die mittlere Temperatur der äusseren Spulenfläche. Sonst sind die Tabellen wie die obigen angeordnet. Graphisch dargestellt sind die Resultate in den Figuren 6 und 7, und zwar wieder in Bezug auf  $(1 + \alpha\theta'')^{1/2}$ . Die sich in der Tab. 5 in der Region  $\theta = 500^\circ$  zeigenden hohen Werthe für Wasserstoff habe ich weggelassen, da sie jedenfalls durch eine Verunreinigung des Gases bedingt sind. Dies ist durch die besonders sorgfältige Wiederholung der Versuche in Tab. 6 erwiesen.

Tabelle 4. Zähigkeit der Luft.

Platin-capillare Nr. 10,  $L = 33,43$ ,  $l' + l'' = 4,4$  cm,  
 $\nu_0 = 0,000\,249\,1$ ,  $\theta = 7^\circ$ ,  $R = 0,0079$  cm.

$P$	$p$	$t''$	$V_0$	$\theta_1''$	$\theta_2''$	$\frac{\eta''}{1 + 4\frac{r''}{R}} \times 10^6$	$F(\theta'')$
124,00	76,08	165	49,95	7	7	252,6	—
124,00		165	49,83			253,2	—
124,00		165	49,84			253,2	—
124,00		165	49,94			252,7	—
124,01		165	49,94			252,8	—
123,51	75,92	1750	51,35	984	1007	669,3	2,687
123,45		1760	51,90	983	1004	666,6	2,676
123,38		1740	51,36	984	1004	665,4	2,671
123,32		2339	51,05	1200	1224	775,7	3,114
123,29		2340	50,48	1204	1230	782,0	3,139
123,25	75,67	2340	50,76	1204	1233	776,5	3,117
123,39		860	52,69	515	525	497,7	1,998
123,65		890	50,91	557	567	511,4	2,053
123,61		910	51,00	557	578	506,8	2,082
123,58		930	50,79	580	592	521,0	2,091
123,61	75,68	960	51,37	592	604	525,4	2,109

(Fortsetzung von Tab. 4.)

$P$	$p$	$t''$	$V_0$	$\theta_1''$	$\theta_2''$	$\frac{\eta''}{1+4\zeta''/R''} \times 10^8$	$F(\theta'')$
123,36	74,73	165	49,59	8	8	254,7	—
123,37		165	49,59			254,7	—
123,36		165	49,50			255,2	—
123,36		165	49,59			254,7	—
123,33		165	49,63			254,3	—

Tabelle 5.

Zähigkeit des Wasserstoffes.

Platincapillare Nr. 10,  $L = 33,43$  cm,  $l' + l'' = 4,4$  cm,  
 $\eta_0 = 0,000\ 129\ 4$ ,  $\theta = 8^\circ$ ,  $R = 0,0079$  cm.

$P$	$p$	$t''$	$V_0$	$\theta_1''$	$\theta_2''$	$\frac{\eta''}{1+4\zeta''/R''} \times 10^8$	$F(\theta'')$
122,48	74,71	90	50,66	8	8	133,0	—
122,49		88	49,81			132,3	—
122,50		88	49,79			132,4	—
122,50		88	49,69			132,6	—
122,50		88	49,68			132,7	—
122,20	74,62	88	49,51	8	8	132,3	—
122,22		88	49,51			132,4	—
122,24		88	49,55			132,4	—
122,22		88	49,62			132,0	—
122,24		88	49,58			132,3	—
122,30	74,69	885	50,11	947	970	352,5	2,725
122,30	74,73	870	49,10	948	972	352,8	2,726
122,32	74,75	870	49,02	948	976	352,9	2,727
122,36	74,81	875	49,25	946	978	353,3	2,731
122,43	74,86	900	49,68	955	984	358,4	2,770
122,97	74,93	1340	49,64	1196	1228	458,8	3,546
122,94	74,96	1350	49,96	1202	1228	457,7	3,538
122,96	74,99	1350	50,39	1192	1226	455,6	3,521
124,56	76,86	495	51,65	526	538	292,4	2,260
124,56		495	51,09	531	544	293,9	2,271
124,56		495	50,83	535	547	293,9	2,271
124,54		495	50,48	536	552	295,2	2,281
124,56		495	50,18	541	554	296,0	2,287
124,58		495	50,09	544	556	295,7	2,285
125,09	77,08	85	50,28	8	8	130,4	—
125,08		85	50,28			130,4	—
125,09		85	50,30			130,4	—
125,08		85	50,28			130,4	—
125,09		85	50,28			130,4	—



Tabelle 6. Zähigkeit des Wasserstoffes.  
 Platincapillare Nr. 10,  $L = 33,43$  cm,  $l' + l''' = 4,4$  cm,  
 $\eta_0 = 0,000\ 129\ 4$ ,  $\theta = 7^\circ$ ,  $R = 0,0079$  cm.

$P$	$p$	$t''$	$V_0$	$\theta_1''$	$\theta_2''$	$\frac{\eta''}{1 + 4 \frac{t''}{R}} \times 10^6$	$F(\theta'')$
123,30	76,95	90	50,00	7	7	133,2	—
123,32		90	50,00			133,3	—
123,31		90	50,00			133,3	—
155,27	76,55	360	50,82	410	418	251,8	1,946
155,27		360	50,42	412	420	252,9	1,954
155,27		360	50,02	416	425	253,6	1,960
155,30		360	49,67	420	426	254,7	1,968
155,30	76,55	440	50,89	504	510	274,1	2,118
155,27		450	51,37	509	516	274,7	2,123
155,25		450	51,23	512	519	274,7	2,124
155,45	76,59	450	50,87	514	522	276,2	2,135
155,35		450	50,57	516	525	277,0	2,141
155,45		450	50,63	517	526	276,6	2,138
156,10	76,67	890	50,89	954	956	363,5	2,809
156,07		890	51,00	954	953	362,9	2,805
156,05		890	51,43	952	951	360,6	2,787
156,07		870	50,01	946	946	360,1	2,783

Tabelle 7. Zähigkeit der Luft.

Platincapillare Nr. 10,  $L = 33,24$  cm,  $l' + l''' = 4,4$  cm.  
 $\eta_0 = 0,000\ 249\ 1$ ,  $\theta = 8^\circ$ ,  $R = 0,0079$  cm.

$P$	$p$	$t''$	$V_0$	$\theta_1''$	$\theta_2''$	$\frac{\eta''}{1 + 4 \frac{t''}{R}} \times 10^6$	$F(\theta'')$
125,50	77,01	165	50,72	7	7	257,9	—
125,51		165	50,75			257,9	—
125,53		165	50,72			258,1	—
124,71	76,87	710	51,10	424	436	482,0	1,935
124,71		710	50,22	430	443	486,5	1,953
124,69		735	51,03	439	453	499,5	2,005
124,65		750	50,93	449	462	493,7	1,982
124,73	76,87	930	51,34	558	568	535,1	2,148
124,68		930	50,98	562	574	535,1	2,148
124,68		940	51,34	565	576	536,0	2,152
124,68		940	50,93	569	580	536,4	2,153
124,95	76,89	1710	51,42	964	987	678,4	2,723
124,95		1715	51,20	970	992	664,5	2,668
124,95		1740	51,25	979	1000	684,2	2,747
124,96	76,98	2370	51,27	1206	1214	801,3	3,217
124,96		2370	51,17	1207	1214	802,8	3,223
124,95		2370	51,25	1207	1210	801,7	3,218

Eine Vergleichung der Werthe von  $\theta_1''$  und  $\theta_2''$  ist wohl das beste Kriterium für die Constanz der Temperatur. Die Zahlen lassen noch zu wünschen übrig. Indessen bin ich wohl so weit gegangen, als es ohne gründliche Abänderung des Apparates und der Methode möglich ist. Glimmer wird durch Glühen gelockert, muss daher oft erneuert werden. Andererseits ist vieles Herumbiegen an der feinen Capillare bedenklich.

#### Discussion.

17. Die Werthe  $\eta_0$  (Zähigkeit bei 0° C.) ergeben sich bedeutend zu hoch, ein Umstand, der jedoch leicht erklärlich ist: denn da  $\delta \eta / \eta = 4 \delta R / R$  ist, hängt der absolute Werth des  $\eta_0$  ganz wesentlich von dem des  $R$  ab. Ich hätte nun vermöge des wohlbekannten Werthes von  $\eta_0$  für Luft sämtliche Daten leicht reduciren können. Indessen hielt ich diesen Schritt doch insofern für bedenklich, als man nicht sicher wissen kann, ob im Inneren feiner Platincapillaren die Gasverdichtungen nahe der Metallfläche ohne merklichen Einfluss sind. Da ich ferner von einer besonderen Bestimmung von  $R$  absehen muss, und da es bei dieser Arbeit auf absolute Werthe wenig ankommt, lasse ich die Zahlen so stehen, wie ich sie fand.

Von grösserem Belang ist der zeitliche Verlauf der  $\eta_0$ . Es zeigt sich für  $H_2$  (6 Tage) eine mittlere Vergrösserung des  $\eta_0$  von etwa 0,5 Proc. per Tag; für Luft in elf Tagen eine Vergrösserung von nur 0,2 Proc. per Tag. Im ersteren Falle bietet das aus verschiedenen Gasometerfüllungen entnommene Gas keinen guten Anhaltspunkt. Im letzteren Falle jedoch zeigt die geringe Aenderung für taglangen Gebrauch der Capillare, dass selbst bei solch hohen mittleren Drucken, wie  $P = 125$  cm. resp.  $p = 76$  cm, an den beiden Enden der Röhre und bei Temperaturen, die oft bis zu Weissgluth (1400°) gesteigert wurden, keine bedenkliche Vergrösserung des  $R$  zu constatiren ist. (Vgl. § 26.) Die Nachwirkung im glühenden Platin ist daher selbst bei hohen Temperaturen unter den genannten Umständen noch eine hinreichend geringe, um die Ausführung pyrometrischer Versuche

unbedenklich zu machen. Auch ist dies aus den Werthen des  $\eta_0$ , welche vor und nach jeder Beobachtungsreihe für hohe Temperaturen gefunden wurden, klar ersichtlich.

Für das zu verschiedenen Zeiten dem Gasometer entnommene Wasserstoffgas ist  $\eta_0$  leider sehr verschieden. Man hat daher jede solche Gasmasse für sich selbst zu behandeln. Die Werthe des  $\eta_0$  für Luft schwanken nicht zu viel, während der ganzen Versuchszeit nur um etwa 2 Proc. Ob die durch den Quecksilberdruckapparat mitgeführten Quecksilberdämpfe die Transpiration beeinflussen, kann ich nicht entscheiden. Ein solcher Fehler ist bei  $20^\circ$  wohl nicht zu befürchten. Bezüglich der Platinzerstäubung vgl. § 19 und der Gasverdichtung an der Oberfläche vgl. § 28.

18. Um eine Uebersicht über das Verhältniss der Zähigkeit  $\eta''/\eta_0$  zu erhalten, benutzt man am besten die Darstellung Fig. 5 bis 7. Daraus geht hervor, dass die Werthe von  $F(\theta'')$  sich der Function  $(1 + \alpha\theta'')^{3/2}$  innerhalb der Grenze der Beobachtungsgenauigkeit befriedigend gut anschmiegen. Selbstverständlich fällt es mir nicht ein, definitiv zu behaupten, dass  $(1 + \alpha\theta'')^{3/2}$  die wahre Form der  $F(\theta'')$  sei (§ 28). Es ist nur bemerkenswerth, dass an der Hand der üblichen Darstellungsweise der Temperaturverhältnisse des  $\eta$  durch die Exponentialfunctionen der einfache Ausdruck  $(1 + \alpha\theta'')^{3/2}$  meine Versuche ganz gut wiedergibt. Ich nehme daher vorläufig an, dass die Zähigkeit eines vollkommenen Gases, im Gebiete höherer Temperaturen, mit der Zweidrittelpotenz der absoluten Temperatur zunimmt. Daraus ergibt sich dann aus der bekannten Beziehung Maxwell's:  $\eta = 0,318 \rho L \Omega$ , wo  $\Omega$  der arithmetische Mittelwerth der Moleculargeschwindigkeit,  $L$  die mittlere Weglänge,  $\rho$  die Gasdichte ist, und insofern  $\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 + \alpha\theta''}$ , auch  $L = L_0 \sqrt[3]{1 + \alpha\theta''}$ . Das lässt sich auch so ausdrücken: Die mittlere, freie Weglänge ändert sich proportional der Cubikwurzel der Moleculargeschwindigkeiten ( $\Omega$ ). Zieht man die bekannte Clausius'sche Gleichung  $L = 1/\sqrt{2} \cdot \lambda^3/\pi \epsilon^2$  hinzu, so ist auch meist der Raum der Wirkungssphäre der Quadratwurzel der Moleculargeschwindigkeit ( $\Omega$ ) umgekehrt proportional.

19. Nach diesen Angaben müssen wir noch die Fehlerquellen specieller betrachten. Zweifellos kommt dabei das Ungenügende der Temperaturconstanz im Innern der Platinspirale zuerst in Betracht. Man hat es eben mit zwei Pyrometern, einem electrischen und einem Zähigkeitspyrometer, zu thun, welche beide genaue Temperaturen anzugeben sehr wohl im Stande sind, deren Temperaturangaben sich aber nicht auf genau dieselben Bedingungen beziehen und sich daher nicht vollständig decken können. Speciell zu bemerken ist, dass selbst bei dem Temperaturvergleich zwischen Thermoelement und Luftthermometer der Versuch über  $1200^{\circ}$  an Genauigkeit verliert.

Ausser diesen äusserlichen Ursachen kommen noch innere hinzu. Den thermischen Effect der Ausdehnung des vom Druck  $P$  zum Druck  $p$  transpirirenden Gases hat O. E. Meyer ausführlich discutirt. Zugleich ist der Einfluss der Abkühlung des in die glühende Capillare einströmenden kalten Gases zu beachten. Bei langsamem Fluss ist dieser Fehler gering; bei schnellerem Fliessen konnte ich jedoch Kühlungen von  $20^{\circ}$  C. beobachten.

Die beobachtete Wendung der Curven oberhalb  $1000^{\circ}$ , verbunden mit der Thatsache, dass beim Wasserstoff die Erscheinung besonders ausgesprochen ist, deutet wohl auf eine Diffusion der Gase durch die Platinwand der Capillare. Dann muss man aber auch auf eine entsprechende Diffusion des Wasserstoffgases des Brenners bedacht sein. Im letzteren Falle würden die durchgetretenen Gase im Luftstrome verbrennen, wodurch das Sauerstoffvolumen etwa verdoppelt wird. Da aber der Wasserdampf im pneumatischen Apparate absorbirt wird, ergibt sich hier wie beim Wasserstoff ein zu kleines  $V_0$ . Daraus folgt, dass  $v''$ , welches sich umgekehrt wie  $V_0$  ändert, zu gross ausfallen muss. Derselbe Fehler entsteht auch dann, wenn der Wasserstoff Luftverunreinigungen enthält.

Es folgt daraus, dass die Anwendung verhältnissmässig dickwandiger Capillaren mit sehr feinem Lumen ( $R < 0,01$ ) zweckmässig ist. Auch sind vorerst Differentialmethoden, bei welchen zwei Grössen verglichen werden, ohne das jede einzeln charakterisirt wird, bedenklich.

Schliesslich ist ein äusserst wichtiger Umstand zu beachten, das Fortschleudern feiner Metalltheilchen durch glühende Metalle, wie es von Nahrwold<sup>1)</sup>, Berliner<sup>2)</sup>, Kayser<sup>3)</sup> und anderen constatirt worden ist. Leider war mir dieses Phänomen im Verlaufe meiner Arbeit noch nicht genügend bekannt. Es sind also meine sämtlichen Resultate mit dem daraus erwachsenden Fehler behaftet. Auch ersehe ich nicht, wie man denselben ohne eingehende Versuche in Rechnung setzen kann.

Ich glaube aber nicht, dass besagte Zerstäubungserscheinungen für meine Versuche kritisch sind. In der letzten Arbeit Nahrwold's<sup>4)</sup> ist gezeigt worden, dass glühendes Platin im Wasserstoff weniger leicht zerstäubt, als in atmosphärischer Luft.<sup>5)</sup>

Nun zeigen aber bei mir beide Gase dasselbe Zähigkeitsverhalten bei verschiedenen Temperaturen, ein Verhalten, das dem des Wasserstoffes bei der Zimmertemperatur gleich ist; woraus sich dann die Rechtfertigung meiner Ansicht ergibt.

20. Geht man zum Resultat des § 18 zurück, so hat man für vollständige Gase nunmehr folgenden, noch den Gleitungscoëfficienten noch enthaltenden Ausdruck:

$$\frac{\eta'}{1 + \frac{4\zeta_0}{R_0} \sqrt[6]{1 + \alpha\theta''}} = \frac{\eta_0}{1 + 4\zeta_0/R_0} (1 + \alpha\theta'')^3,$$

wo sich  $R_0$  und  $\zeta_0$  auf  $0^\circ$  C. beziehen, und  $\zeta$  nach Meyer, Kundt und Warburg der Weglänge proportional sich ändert. Ist dann  $4\zeta_0/R_0$ , wie man allgemein annimmt, sehr klein gegen 1, so wird auch  $4\zeta_0 \sqrt[6]{1 + \alpha\theta''}/R_0 (1 + \beta\theta'')$  innerhalb des obigen Temperaturintervalls gegen 1 zu vernachlässigen sein; denn der Coëfficient  $(1 + \alpha\theta'')^{1/6} (1 + \beta\theta'')$  ist bei  $500, 1000, 1500^\circ$  nicht grösser als 1,15, 1,22, 1,23; während ein wahrscheinlicher Maximalwerth bereits bei niedriger

1) Nahrwold, Wied. Ann. **31**. p. 473. 1887; **35**. p. 120. 1888.

2) Berliner, Wied. Ann. **33**. p. 289. 1888.

3) Kayser, Wied. Ann. **34**. p. 607. 1888.

4) Nahrwold, Wied. Ann. **35**. p. 120. 1888.

5) Vgl. Elster u. Geitel, Wied. Ann. **31**. p. 109. 1887.

Temperatur angetroffen werden wird. Es folgt also, dass, falls die in Frage stehenden Daten der Gastheorie richtig sind, der Einfluss des Gleitungscoëfficienten durchweg zu vernachlässigen sein wird. Es folgt ferner, dass der Uebergang aus der rascheren Aenderung des  $\eta$  bei niederen Temperaturen, z. B. nach der Holman'schen Formel (0 bis 130°):

$$\eta''/\eta_0 = 1 + 0,02751 t - 0,0034 t^2,$$

in die langsamere nicht einer progressiven Vergrösserung der Function  $1 + 4\zeta/R$  zuzuschreiben ist.

21. In Bezug hierauf bemerke ich ferner, dass nach der Formel  $(1 + \alpha\theta'')^n = \eta/\eta_0$  die O. E. Meyer'schen Werthe für Luft zwischen  $n = 2/3$  und  $n = 3/4$  schwanken; die Puluj'schen zwischen  $n = 0,56$  und  $n = 0,72$ . Warburg fand  $n = 0,77$ ; v. Obermayer  $n = 0,76$ . Holman verwirft mit Schumann die Exponentialformen. Es fragt sich also, ob meine Versuche, welche für Temperaturen oberhalb 400° gelten, nicht das Verhalten eines vollständigeren Gases wiedergeben als Luftversuche bei niedriger Temperatur. Dissociation ist natürlich ausgeschlossen. Es sind hier die Resultate E. Wiedemann's zu erwähnen, gemäss welcher nach Meyer'scher Berechnung der Exponent  $n$  abfällt von  $n = 0,73$  für Luft zwischen 0 und 100°, bis  $n = 0,67$  für Luft zwischen 100 und 185°. Letzterer ist aber mit meinem Werthe  $n = 2/3$ , welcher sogar bis 1330° gilt, gut im Einklange. Es ist daher die Vermuthung gerechtfertigt, dass unterhalb 200° die Luft die Eigenschaften des Gaszustandes allmählich verliert; dass die reine kinetische Gasreibung durch Cohäsionen, d. h. durch die Bildung ephemerer Molecularaggregate, mehr und mehr beeinflusst wird. Besonders hat v. Obermayer die Werthe von  $n$  bei verschiedenen Gasen und die sich analog vergrössernden Ausdehnungscoëfficienten derselben verglichen.

Diese Folgerungen werden durchweg durch das Verhalten des Wasserstoffs bestätigt. Puluj fand für dieses Gas  $n = 0,69$ ; Warburg  $n = 0,63$ ; v. Obermayer  $n = 0,70$ . Es zeigt also Wasserstoff, seinem vollständigeren Gaszustand caet. par. entsprechend, denselben Werth des  $n$  bei 0° C.,

wie bei Rothgluth. Die Thatsache, dass Wasserstoff bei niedriger Temperatur ( $0^{\circ}\text{C.}$ ) bereits demselben Gesetz folgt, wie Luft oberhalb  $200^{\circ}$ , dass ferner bei Temperatursteigerung über  $200^{\circ}$  bis in die Rothgluth die Gesetze für beide Gase mehr und mehr identisch werden, ist wohl der beste Beweis, welchen ich für die Wahrscheinlichkeit meiner Beziehung:

$$\eta'' = \eta_0 (1 + \alpha \Theta'')^{\frac{1}{2}}$$

liefern kann. Diesen identischen Verlauf habe ich eben beobachten können, weil dabei die Fehler der Temperaturconstanz und dergleichen in höherem Maasse herausfallen. Die Fehler sind eben gleichmässig auf beide Gase vertheilt, da die Beobachtungen in gleicher Weise nacheinander ausgeführt wurden. Vgl. §§ 19, 28.

22. Ich will nun noch einiges über den praktischen Werth der Function  $(1 + \alpha \Theta'')^{\frac{1}{2}}$  anführen. Falls man zwischen verschiedenen Formen wählen dürfte, so wäre die exponentielle schon deswegen vorzuziehen, weil sie die pyrometrischen Berechnungen erleichtert. Theoretisch lässt sich für eine durch zweiatomige Molecüle charakterisirte Gasart wenig aussagen, obgleich für Gasarten mit einatomigen, elastischen Molecülen Maxwell<sup>1)</sup> und Meyer<sup>2)</sup> das einfachere Gesetz  $\eta'' = \eta_0 \sqrt{1 + \alpha \Theta''}$  haben ableiten können. Bekannt ist ferner, dass das Maxwell'sche<sup>3)</sup> Abstossungsgesetz der umgekehrten fünften Potenz unhaltbar ist, wie besonders Meyer<sup>4)</sup> gezeigt hat. Demnach bliebe die Wahl der Temperaturfunction der Zähigkeit noch frei.

Als Beispiel will ich eine weitere einfache Function, die man wohl versucht sein dürfte anzuwenden, mit der exponentiellen vergleichen. Ich setze  $\eta'' = \eta_0 (1 + \gamma \Theta'') \sqrt{1 + \alpha \Theta''}$ , in welchem Ausdruck  $L = L_0 (1 + \gamma \Theta'')$  enthalten ist. Um diesen Vergleich einigermaßen darstellen zu können, habe ich aus den Daten für hohe Temperaturen einerseits die

1) Maxwell, Phil. Mag. (4) 19. p. 31. 1860.

2) Meyer, Pogg. Ann. 125. p. 177. 401. 564. 1865.

3) Maxwell, Phil. Trans. 1. p. 249. 1866; cf. Phil. Mag. (4) 35. p. 129. 185. 1868.

4) Meyer, Kinetische Theorie. § 77.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.



Nullwerthe von  $\eta''/\eta_0$  (d. h. den der Einheit nahezu gleichen Werth für  $\theta'' = 0^\circ \text{ C.}$ ), andererseits die Werthe für  $\gamma$  berechnet und in folgende Tabelle eingetragen. Die Argumente sind den Tab. 4 bis 7 entnommen.

Tabelle 8. Nullwerthe von  $\eta''/\eta_0$  und  $\gamma$ .

	$\theta''$	$\eta''/\eta_0$	$\frac{\eta''}{\eta_0} \frac{1}{(1 + \alpha \theta'')^{1/2}}$	Fehler	$\frac{\eta''}{\eta_0} \frac{1}{1 + \alpha \theta''}$	$\gamma \times 10^6$
Luft Tab. 4	565	2,068	0,98	+ 0,02	1,18	318
	592	2,100	0,97	+ 3	1,18	304
	995	2,678	0,96	+ 4	1,24	248
	1216	3,123	1,01	- 1	1,34	277
Luft Tab. 7	442	1,969	1,01	- 0,01	1,22	489
	569	2,150	1,01	- 1	1,22	394
	982	2,713	0,98	+ 2	1,26	270
	1210	3,219	1,04	- 4	1,38	315
$\text{H}_2$ Tab. 5	961	2,727	1,00	$\pm 0,00$	1,28	295
	1212	3,535	1,14	- 14	1,52	425
$\text{H}_2$ Tab. 6	418	1,957	1,05	- 0,05	1,23	550
	512	2,122	1,05	- 5	1,25	490
	520	2,138	1,05	- 5	1,25	489
	952	2,798	1,08	- 3	1,32	336

Die bei den Daten für Luft auftretenden Fehler:

$$1 - \frac{\eta''}{\eta} \frac{1}{(1 + \alpha \theta'')^{1/2}}$$

zeigen keinen regelmässigen Gang und sind nicht grösser, als man bei der Schwierigkeit der Versuche erwarten muss. Die Fehler bei Wasserstoff sind zwar bedeutender, lassen sich aber leicht erklären. Bei  $1212^\circ$  begegnet man wieder dem bereits erwähnten Diffusionsfehler. Ferner sind die nahezu constanten Fehler der Tabelle 6 nicht dem Verlauf des  $\eta''$ , sondern dem des  $\eta_0$  zuzuschreiben. Schliesslich ist in der zweiten Tabellenhälfte die Unzulänglichkeit der Hypothese  $L = L_0(1 + \gamma \theta'')$  klargestellt. Proben mit anderen Functionen übergehe ich.

#### Transpirationspyrometrie.

23. Ich nehme daher die Relation  $\eta'' = \eta_0(1 + \alpha \theta'')^{1/2}$  für ein zweiatomiges vollständiges Gas, wie Luft oder Wasserstoff als gültig, an. Darauf lässt sich dann eine neue pyrometrische Methode aufbauen. Dieselbe fusst auf der

Meyer'schen Gleichung der Gastranspiration. Ich glaube fest, dass eben auf diese Weise Bestimmungen von hohen Temperaturen sich nicht nur absolut ausführen lassen werden, sondern dass dies über ein grösseres Temperaturintervall und mit grösserer Präcision und Bequemlichkeit zugleich geschehen wird, als bei irgend einer bekannten pyrometrischen Methode z. Z. möglich ist, das Porzellanluftthermometer keineswegs ausgeschlossen. Ferner ist bei empirischen Gesetzen, welche sich auf grosse Intervalle beziehen, die vorsichtige Extrapolation bei einem Gase ein weniger bedenkliches Wagniss, als bei analogen Gesetzen für feste oder flüssige Körper.

Führt man  $\eta''/\eta_0 = (1 + \alpha\theta'')^{3/2}$  in die Meyer'sche Gleichung ein, so ergibt sich:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{(1 + \alpha\theta'')^{3/2}}{(1 + \beta\theta'')^4} &= \frac{\pi}{16} \frac{1 + 4\zeta''/R''}{\eta_0} \frac{P^2 - p^2}{76} \frac{l''}{V_0} \frac{R''^4}{l''} \\ &- \frac{1 + 4\zeta''/R''}{1 + 4\zeta/R} \left( \frac{R_0''}{R_0} \right)^4 \frac{l' + l'''}{l''} (1 + (\alpha + \gamma)\theta), \end{aligned} \right.$$

welche Beziehung durch Weglassung der  $\zeta$ -Grössen sofort vereinfacht werden kann. Hier bedeutet  $\eta_0$  den Nullwerth der Luftzähigkeit,  $\theta$  die Temperatur der kalten Enden der Capillare,  $\gamma$  den Coëfficienten für kaltes Gas, also für Luft etwa  $\gamma = 0,00275$ . Die übrigen Variablen sind aus § 13 bekannt;  $R_0''$  und  $R_0$  z. B. sind die Halbmesser des heissen ( $l''$ ) und des kalten ( $l' + l'''$ ) Theiles der Capillare bei  $0^\circ \text{C}$ . In meinem Apparat ist aber  $R_0'' = R_0$ . Um also die Temperaturen der Tabellen 4 bis 7 aus reinen Gaszähigkeitsmessungen zu reproduciren, bedient man sich für Luft der Gleichung:

$$(12) \quad \left\{ \frac{(1 + \alpha\theta'')^{3/2}}{(1 + \beta\theta'')^4} = \frac{\pi R_0^4}{16 \cdot 76 \cdot \eta_0 l''} \frac{l''}{V_0} (P^2 - p^2) - \frac{l' + l'''}{l''} (1 + 0,0064\theta), \right.$$

das heisst:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &= A \frac{l''}{V_0} (P^2 - p^2) - B (1 + 0,0064\theta), \end{aligned} \right.$$

eine Form, die (11) enthält.

Ist also eine Pyrometercapillare gegeben, bei welcher der Länge nach das Caliber nicht genügend gleichförmig oder gleichwerthig ist, so kann man mittelst zweier bekannten Temperaturen  $\theta''$  die Werthe  $A$  und  $B$  experimentell be-

stimmen (s. w. u.). Aus (11) bis (13) ist ersichtlich, dass, da die rechte Seite wie die  $\frac{5}{3}$ -Potenz der absoluten Temperatur variirt, man es mit einem gegen Temperaturänderungen äusserst empfindlichen Apparate zu thun hat. Ferner geht daraus hervor, dass das bedenkliche Auftreten von  $(1 + \beta\theta'')$  insofern von geringerem Belang ist, weil in Bezug auf  $(1 + \alpha\theta'')$  die Correction  $(1 + \beta\theta'')$  nur in der 2,4-Potenz vorkommt. Ja, man kann bei bekannter Temperatur  $\beta$  direct aus Transpirationsmessungen bestimmen, indem man (13) in Bezug auf  $\beta$  auflöst. Schliesslich lässt sich auch die Grösse  $R_0^4/\eta_0$  der Gleichungen (11) und (12) durch Transpiration bei niederen Temperaturen bestimmen. Uebergeht man unwesentliche Correctionen, so gilt:

$$\frac{1}{\frac{R_0^4}{\eta}} = \frac{\pi}{16 \cdot 76 \cdot L V_0} \ell'' (P^2 - p^2),$$

wo, falls die Messungen bei  $\theta$  gemacht werden,  $\eta$  sich aus bekannten Constanten auf  $\eta_0$  reduciren lässt. Es entspricht dies der Nullpunktsbestimmung des Pyrometers.

24. Ich führe nun Angaben über Temperaturbestimmung aus reinen Transpirationsbeobachtungen an und vergleiche dieselben mit den direct gemessenen Temperaturen. Dazu dienen die Mittelwerthe in den Tabellen 4 bis 7. In folgender Tabelle ist  $\theta''$  die mittelst des Luftthermometers thermoelectrisch bestimmte Temperatur,  $[\theta'']$  die zugehörige Transpirationstemperatur. Die Art der Messung  $\theta''$  ist in Fig. 4 dargelegt. (Siehe Tab. 9 p. 389.)

Die Fehler liegen hier also anders, ihre Grösse habe ich bereits angedeutet, um hier schnell darüber hinweg gehen zu können. Eine bestimmte Fehlervertheilung ist nicht zu erkennen. In der letzten Bestimmung der Temperatur des Wasserstoffs ist der Uebelstand eines zu kleinen  $\eta_0$  bemerkbar, da die Fehler durchweg denselben negativen Werth beibehalten. In Bezug auf die Fehler im allgemeinen ist es ersichtlich, dass zwischen der mittleren Temperatur der etwa 67 cm langen Platin-capillare und der mittleren Temperatur der drei Punkte des Thermoelements, in anbetracht der Erhitzungsart, Differenzen von  $20^\circ$  bei  $1000^\circ$  ohne weiteres vorauszusetzen sein werden. Vergleicht man aber die Transpirationstemperaturen

[ $\theta''$ ] unter sich, so springt die ausgezeichnete Präcision der Resultate sofort in die Augen. Man schliesst leicht, dass das Transpirationspyrometer die Genauigkeit von einigen Zehntel Graden bei 1000° sehr wohl ergeben könnte, gleichgültig, ob das vorauszusetzende  $\eta''/\eta_0$  wirklich das Verhalten der Zähigkeit des Gases für verschiedene Temperatur angibt oder nur ein für Platin-Luft, resp. Platin-Wasserstoff geltendes empirisches Gesetz sein mag.

Tabelle 9. Temperaturmessung durch Transpirationspyrometer.

$\theta''$	[ $\theta''$ ]	Diff.	$\theta''$	[ $\theta''$ ]	Diff.	$\theta''$	[ $\theta''$ ]	Diff.
Tab. 4. Luft.			563	571	- 8	1209	1329	-120*
520	511	+ 9	568	574	- 6	1212	1338	-126*
562	549	+13	570	577	- 7	1215	1337	-122*
567	558	+ 9	575	580	- 5	Tab. 6. Wasserstoff.		
586	572	+14	975	965	+10	414	434	-20
598	583	+15	981	971	+10	416	437	-21
994	964	+30	990	981	+ 9	421	441	-20
994	963	+31	1209	1245	-36	423	445	-22
996	966	+30	1210	1245	-35	507	529	-22
1212	1217	- 5	1210	1247	-37	513	535	-22
1217	1227	-10	Tab. 5. Wasserstoff.			515	536	-21
1219	1222	- 3	518	541	-23	520	543	-23
Tab. 7. Luft.			521	543	-22	521	543	-22
430	442	-12	958	956	+ 2	946	963	-17
436	450	-14	960	958	+ 2	952	968	-16
446	458	-14	962	959	+ 3	954	974	-20
455	467	-12	962	960	+ 2	955	976	-21
			970	975	- 5			

\* Gasdiffusion.

### III. Transpirationen, welche dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz nicht genügen. Schluss.

#### Allgemeine Ergebnisse.

25. Es steht dem Gebrauch sehr feiner Capillaren der Uebelstand entgegen, dass die Transpirationsströmung bei Weissglühhitze fast vollständig zum Stillstand kommt. Diese Schwierigkeit lässt sich natürlich in verschiedener Weise umgehen. Man kann z. B. statt einer einzigen Capillare ein Capillarbündel anwenden oder das Gas in verschieden graduirten Gefässen messen, worin grosse und kleine Gasvolumina

sich etwa gleich genau messen lassen, oder man wendet graduirte Capillaren an, deren Kaliber und Länge sich nach vorgeschriebenen Gesetzen ändert; oder schliesslich, man misst bei langsamem, continuirlichen Strom die Transpirationsgeschwindigkeiten  $V_0/t$  durch irgend eine zweckmässige Repetitionsmethode. Trotz alledem ist aber zu wünschen, dass für Röhren, die nicht gerade capillar sind, die Transpirationsart ermittelt würde; denn unter sich stimmen solche für gleiche Bedingungen geltende Beobachtungen sehr gut, obgleich die Zeitdauer der empirischen Temperaturmessungen kaum eine Minute betragen mag.

Zur Ausführung solcher Versuche sind aber grössere Gasvolumina nothwendig. Ich habe daher das Gas vor dem Eintritt in die Capillare gemessen und möchte dabei auf die wichtige Eigenschaft meines Apparates zurückgehen, dass derselbe das Gas sowohl vor dem Eintritt in die Capillare, wie nach dem Austritt zu messen gestattet. Der Beobachtende hat es also in der Gewalt, die Capillare auf Risse und dergleichen zu prüfen; ferner den Durchgang des Gases sowohl durch den Capillarcanal (Normalfall) sowie auch durch die glühende Wand derselben (Diffusion) zu controliren.

Vom theoretischen Gesichtspunkte aus bietet die vorliegende Arbeit bedeutende Schwierigkeit. Beim ersten Blick scheint sie vom experimentellen Standpunkt aus leichter zu bewältigen. Man täuscht sich dabei aber auch. Eingehend hat Hoffmann<sup>1)</sup> den Gegenstand bearbeitet. Leider sind indess die Verhältnisse für die jetzigen Zwecke zu complicirt.

Die Methode, vermittelt welcher ich ähnliche Ziele zu erreichen hoffte, ist an sich neu. Ich suchte nämlich die Abweichungen vom Meyer'schen Gesetz dadurch zu ergründen, dass ich bei einer und derselben Capillare die Bedingungen der Anwendbarkeit desselben durch successive Steigerung der constanten Transpirationstemperatur erreichte. Auf diese Weise werden dann die Strömungsgeschwindig-

---

1) Hoffmann, Wied. Ann. 21. p. 470. 1854. Die Literatur (Navier, Poisson, Stokes, Cauchy, de St. Venant, Stefan) ist daselbst angegeben.

keiten infolge der Volumen- und Zähigkeitszunahme auf eine beliebige kleine Grösse herabgedrückt, bis man schliesslich sich innerhalb der Grenze des Meyer'schen Gesetzes bewegt. Von den Versuchsergebnissen abgesehen, die ich in ziemlicher Fülle gesammelt habe, ist mir aber bei dem weiteren Ausbau der eigentlichen Aufgabe nicht wesentlich Beachtenswerthes gelungen. In Anbetracht der grösseren Ausdehnung der jetzigen Arbeit werde ich mich auch hier beschränken, indem ich ausser einigen Zahlenbeispielen die Hauptmittheilungen graphisch darzulegen suche. Tabellarische Mittheilung wird a. a. O. erfolgen.

Statt einfach vom Radius  $R$  der Capillare zu reden, wäre es natürlich richtiger, sich auf das Dimensionsverhältniss des Canals ( $2R/L$ ) zu beziehen. Es ändert sich die Länge aber weniger; daher ist es zweckmässig, diejenige Grösse  $R$  zu wählen, welche die geeignetste erscheint.

Mitzutheilen wäre noch, dass ich mich im Verlauf dieses Abschnittes öfters der Differentialmethode mit Erfolg bedienen konnte.

### Resultate.

26. Für die graphischen Darstellungen der Figuren 8 bis 11 wurde die Ordinatengrösse  $\eta''$  mittelst der Meyer'schen Gleichung aus den Dimensionen der resp. Capillaren (Radius =  $R$ ) und den Transpirationsbeobachtungen (Druck, Zeit, Volumen) berechnet. Daraus folgt dann, insofern der genannten Gleichung hier im allgemeinen nicht Genüge geleistet wird, dass  $\eta''$  sich als eine Function der Druckdifferenz an den Enden der Capillare darstellt. Ich habe also diesen Druckwerth  $P - p'$ , von dem der Atmosphäre (76 cm etwa) an bis ca.  $p + 50$  cm, successive vergrössert, und zwar für jede der betreffenden Temperaturen der Capillarspirale. In den Darstellungen ist sowohl  $\eta''$ , wie der Druck und die Temperatur, angegeben. Fig. 8 enthält die  $\eta''$ -Werthe für das kleinste Lumen,  $R = 0,0079$  cm. Selbst hier ist eine Vergrösserung von  $\eta''$  mit der Druckdifferenz erkennbar. Die verschiedenen Curvenlagen entsprechen verschiedenen Einstellungen der Capillare und rühren etwa von Caliberände-

rungen während der Wickelung her. Bei 980° machte ich nur eine Beobachtung, da dieselbe 18000 Secunden in Anspruch nahm. Es ist eben dieses die Capillare, mit welcher ich nachträglich die Beobachtungen des Abschnittes II machte. Ich führe daher die folgende Zahlenangabe an. Hierbei wurde das grosse Volumen  $V$  vor dem Eintritt in die Capillare gemessen. Demnach bildet also diese Tabelle eine Controle für die Ergebnisse der Figuren 1 bis 7, wie oben angegeben. In Tab. 10 bedeutet ausser den bekannten Grössen  $\tau$  die Temperatur der eintretenden Gasmasse  $V$ . Während der fünfständigen Zeit der Transpiration bei 977° wurde  $\theta''$  und  $P$  wiederholt gemessen.

Tabelle 10. Zähigkeit der Luft.

Platincapillare Nr. 10,  $L = 33.43$  cm,  $l' + l'' = 2.7$  cm,  
 $V = 565.7$  ccm,  $R = 0.0079$  cm,  
 $\theta = 7^\circ$ .

$P$	$P-p$	$t''$	$\frac{P^2-p^2}{p} \times t$	$\frac{\eta}{1+4z/R} \times 10^6$	$\theta''$	$\frac{\eta''}{1+4z''/R} \times 10^6$	$\tau$	$F(\theta'')$
1) 133,11	56,35	1506	232 000	272	0	266	19,6	—
92,32	15,56	6545	224 300	262	0	257	19,4	—
2) 124,69	48,04	1677	211 600	251	0	246	21,5	—
88,60	11,95	7930	204 400	243	0	238	22,0	—
3) 125,64	49,18	1683	218 800	—	14	258,8	20,8	—
125,68	49,22	1660	216 000	256	0	250,8	20,7	—
4) 125,22	48,86	18000	2 321 000	255	977	685,8	22,8	2,743
124,68	48,32	1678	213 500	254	0	249,1	22,3	—

1) Erste Einstellung;  $p = 76,76$ ,

2) Zweite „ ;  $p = 76,65$ ,

3) Dritte „ ;  $p = 76,46$ ,

4) „ „ ;  $p = 76,36$ .

Es ist höchst erfreulich, dass die hier gemessene Grösse  $F(\theta'')$  gut mit den Werthen des Abschnittes II stimmt; also das Gesetz  $\eta = \eta_0 (1 + \alpha \theta'')^{1/2}$ , trotz der verschiedenen Methode, bestehen bleibt, und auch  $\eta_0$  vor und nach der Bestimmung der hohen Temperatur (5 Stunden) identische Werthe zeigt. Es deutet dies sichtlich auf sehr geringe Nachwirkung hin. Dass  $F(\theta'')$  hier etwas unter



früheren Werthen liegt, ist wohl dem Umstande zuzuschreiben, dass während der langen Beobachtungszeit selbst ein minimaler Leck im Apparate nicht ohne störenden Einfluss ist.

27. In Bezug auf die Ergebnisse selbst springt das Verhalten der Figur 9 für etwas grösseren Capillarradius,  $R = 0,018$  cm, in die Augen. Hier ist jede der Curven für  $\theta'' = 4, 100, 625, 1025^\circ$  aus etwa zehn Beobachtungen bestimmt, und zwar bilden dieselben zusammen ein System schräg ansteigender, sehr nahezu gerader Linien. Diese Linien steigen um so weniger steil an, je höher die Temperatur wird, bis bei etwa  $1000^\circ$  die horizontale erreicht wird, d. h. bei  $1000^\circ$  ist die Strömung hinlänglich langsam, um dem Meyer'schen Gesetze Genüge zu leisten.

Bei noch grösserem Radius,  $R = 0,025$  cm, tritt dasselbe Phänomen im verstärkten Maassstabe hervor. Die Curven sind durchweg steiler und nähern sich langsam der Horizontalen, wie die Figuren 11 und 12 deutlicher zeigen. Die Unterschiede sind hier verschiedenen Längen und, ebenfalls infolge des Aufwickelns, verschiedenen Radien zuzuschreiben. Bei den hierher gehörenden raschen Strömungszeiten ist der Verlauf der Beobachtungswerthe weniger ausgesprochen geradlinig. Es zeigen sich bei der Strömung Kühlungen bis  $25^\circ$ .

28. Für  $P - p = 0$  ergibt sich, dass das Verhältniss von  $\eta''/\eta_0$  zur Temperatur bei  $R = 0,018$  cm schon unterhalb  $(1 + \alpha\theta'')^{1/2}$  gelegen ist; bei  $R = 0,025$  cm fast bis zum Ausdruck  $\sqrt{1 + \alpha\theta''}$  herabgedrückt erscheint. Infolge der Vergrösserung des Radius wird also der Temperatureinfluss bedeutend verlangsamt. Da nun, wie Fig. 8 zeigt, selbst bei meiner dünnsten Capillare der Einfluss des Druckes noch nicht streng ausgeschlossen ist, habe ich das Gesetz  $(1 + \alpha\theta'')^{1/2}$  in § 18 mit Vorsicht mitgetheilt. Indessen glaube ich doch, dass bei Temperaturen über  $0^\circ$  die Bedingung des Meyer'schen Gesetzes erreicht worden ist.

Ferner habe ich noch die Tangenten in Bezug auf  $\eta'', R, \theta''$  zusammengestellt, daraus aber nichts Wesentliches ableiten können.

Es ist schliesslich der Erscheinung der Gascondensation

auf festen Körper zu gedenken, welche vermuthlich bei Platin besonders stark ist. Nimmt man mit Kayser<sup>1)</sup> an, dass die Dicke der auf Glas adsorbirten Schichten von Ammoniak 0,0<sub>2</sub> bis 0,0<sub>3</sub> cm übersteigen können, so ist man schon bei meiner dünnen Capillare ( $R = 0,008$  cm) dieser Dicke<sup>2)</sup> bereits nahe gerückt. Es ist daher anzunehmen, dass sich die Anzahl der im Canal befindlichen Molecularaggregationen vergrößern können. Hr. O. Schumann<sup>3)</sup>, indem er sich auf die Resultate Kayser's und Chappuis<sup>4)</sup> stützt, verwirft sogar die Transpirationsmethode für die Bestimmung des Temperaturcoëfficienten der Zähigkeit gänzlich. Ich glaube aber doch, dass er darin zu weit geht. Z. B. beziehen sich Hrn. Schumann's eigene Erfahrungen auf das Intervall 0 bis 100°; überhaupt kann man aus den bisherigen Beobachtungen unterhalb 300°, nicht befriedigend auf das Verhalten oberhalb 400° bis Weissgluth schliessen. Ich habe die Versuche der Tabellen 1 bis 7 ausführlich mitgetheilt, um zu zeigen, dass zwischen Anfang und Ende des oft stundenlangen Glühens die Abweichung in den Werthen der Gaszähigkeit klein genug ist, um von den recht geringen Versuchsfehlern verdeckt zu werden. Dass man daraus nicht schliessen kann, welche Aenderung der Dicke der Gasschichten momentan vor sich gehen mag, gebe ich zu.

Bei Ermangelung einer genügend eingehenden Experimentaluntersuchung scheint mir eine weitere Discussion einstweilen fruchtlos zu sein. Ich bemerke aber, dass der von mir wiederholt beobachtete identische Verlauf der Luftreibung und der Wasserstoffreibung, in Bezug auf Temperatur, am ungezwungensten als directe Thatsache aufzufassen ist; denn sonst müsste man annehmen, dass Luft und Wasserstoff bei der Bildung von Schichten auf Platin sich gleich verhalten, oder dass der Unterschied in der Reibung der beiden Gase durch entsprechende Unterschiede der Condensation derselben auf Platin aufgehoben wird. Diese

1) Kayser, Wied. Ann. 14. p. 450. 1881.

2) Vgl. J. W. Langley, Zeitschr. für Phys. Chem. 2. p. 83. 1888.

3) Schumann, Wied. Ann. 33. p. 381. 385. 1884.

4) Chappuis, Wied. Ann. 8. p. 1. 1879.

an sich schon unwahrscheinlichen Alternativen werden noch unwahrscheinlicher, wenn man berücksichtigt, dass die von mir bei Wasserstoff erhaltene, von 0 bis 1000° durchweg geltende Beziehung  $(1 + x\theta)^{1/2}$  durch eine ganz complicirte Function, bzw. durch die Annahme einer Abwesenheit der Gascondensation beim Wasserstoff im Vergleich mit Luft, ersetzt werden müsste. Zum Schluss bemerke ich noch, dass, falls man die Transpirationsmethode verwirft, man über das Verhalten der Gaszähigkeit bei hohen Temperaturen keinen Aufschluss erwarten kann.

#### IV. Schlussbemerkungen.

29. Kraft des im § 23 Gesagten lassen sich Messungen der Temperatur mittelst der Transpiration durch Zeitbeobachtungen  $t$  oder durch Volumenbeobachtungen  $V_0$  oder durch Geschwindigkeitsbeobachtungen  $V_0/t$  oder sogar durch Druckänderungsbeobachtungen  $(P^2 - p^2)/p$  ausführen. Sämmtliche Grössen allein genommen variiren wie die  $5/3$  Potenz der absoluten Temperatur. Daher die Empfindlichkeit der Methode. Von den Methoden ist wohl eine Differentialmethode am brauchbarsten, und zwar entweder in der in §§ 6, 11 beschriebenen Form, oder aber in der von Holman<sup>1)</sup> gebrauchten eleganten Weise, wobei man entweder Compression oder Verdünnung anwenden kann. In Ermangelung einer guten Pumpe lässt sich eine möglichst leichte kleine Gasglocke aus Eisenblech, welche nach Art der Gasometer in Quecksilber taucht, und je nachdem positiv oder negativ zu beschweren ist, verwenden.

Natürlich hat man bei Differentialmethoden den bedeutenden Vortheil, dass sowohl der Gebrauch des Chronometers, als auch des zur Druckmessung erwünschten Kathetometers überflüssig wird, resp. dass selbst kleine Druckänderungen unschädlich sind.

Will man volle Genauigkeit bei der Transpirationsmethode erhalten, so ist dann auch der Platincapillare eine bessere Form zu verleihen, als in dem improvisirten,

1) Holman, l. c.

aber sonst sehr zweckmässigen Apparat Figur 1 und 2. Da das Correctionsglied für die kalten Enden mit der vierten Potenz des Radienverhältnisses abfällt, vermag man den centralen Capillarcanal in Bezug auf die Endöffnungen genügend zu verkleinern. Dadurch, dass man den verkleinerten Theil spiralförmig windet, sowie die Zuleitungs- und Ableitungsröhren an den Enden parallel der Spiralaxe laufen lässt, ist es möglich, dem Transpirationspyrometer eine Stabform zu verleihen, welche die Grösse eines gewöhnlichen Thermometers nicht zu übersteigen braucht, vom Messapparat abgesehen. Dabei ist es in mancherlei Berechnung zweckmässig, sowohl die Spirale als auch die Endröhren mit einer dünnen Platinröhre eng zu umhüllen. In Fällen allzu grosser Endröhren ist jedoch andererseits Gefahr, dass Aenderungen der Temperaturvertheilung hierselbst die Resultate trüben könnten.

Schwierig ist die Aufgabe, die Capillare in die Platinenden ohne Beschädigung des feinen Canales einzufügen. Ausser den dem Platinkünstler bekannten Methoden habe ich noch derjenigen gedacht, dass die Enden der Capillarröhre in die etwas zu weite Endröhre gesteckt werden, letztere alsdann durch Drahtzug im Caliber verjüngt und schliesslich fest auf die Capillarenden gezogen wird. Es lassen sich z. B. auf diese Weise Metallröhren sehr fest mit eingelegten Drahtenden verbinden. Schweissung erfolgt bei höherer Temperatur. Uebrigens kommt auf die Aenderung des Capillarradius nicht gar so viel an, da man ja  $R_0/v_0$  direct bestimmen kann. Deswegen lässt sich die Verjüngung centraler Theile auch dadurch erzielen, dass man entweder in eine Platinröhre grösseren Calibers ein kurzes, dünnes Stück einer feineren hinein bringt, die weitere Röhre dann durch Drahtzug im Durchmesser genügend vermindert, oder aber man schiebt einfach einen feinen Platindraht in den Capillarcanal central hinein. Diese Formen haben den Vortheil, dass zwischen dem capillaren und terminalen Theil des Pyrometers kein Bruch der äusseren Metallcontinuität der Röhren stattfindet. Ja man kann einfach die centralen Theile einer weiteren Capillare (z. B.  $R = 0,025$  cm) durch eine passende kleine Presse direct

verjüngen. Man kann schliesslich ganz ohne Verjüngung den besagten Zweck erreichen, und zwar durch Temperaturerniedrigung. Im Apparat Fig. 1 und 2 ist dann der offene Wassertrog *MM* durch feinere cylindrische Röhren zu ersetzen, in welchen Wasser schnell circulirt. Hier ist man darauf angewiesen, die Dimensionen und Temperatur der längeren Enden direct und scharf zu messen, wodurch das Correctionsglied bestimmt wird.

Genügend lange Capillaren lassen sich auch sehr leicht zu einem Cylinder von 2,5 cm Länge und 9,6 cm äusserem Durchmesser aufwickeln. Solche Spiralen kann man direct in die Centralröhre meines eingestülpten Luftthermometerballons hineinbringen. Der Vergleich wird ebenso wie beim Thermoelement ausgeführt.

Zieht man die Capillare dünn, so lässt sie sich durch den galvanischen Strom erhitzen. Gibt man ihr dann die Form einer offenen Spiralfeder mit isolirten Endröhren, umhüllt sie ferner mit schlecht leitender Substanz, z. B. mit Asbestwolle oder Papier, so erhält man einen Apparat thermostatischer Art. Vermittelst dieses lässt sich eine im Inneren der Capillarspule eingeführte thermoelectrische Löthstelle direct mit dem Transpirationspyrometer calibrieren.

Schliesslich sei mir die Bemerkung erlaubt, dass sich die Transpirationsmethode ebenfalls zum Studium der Gasdissociation in hohen Temperaturen eignen muss; denn Dissociation bringt eben Abweichungen im Normalverhalten der Temperaturverhältnisse der Zähigkeit mit sich. In Fällen, wo Gase durch die Platincapillare diffundiren, ist der Metallapparat mit einer aussen glasirten, an einem Ende geschlossenen Porzellanröhre eng zu umgeben. Denkt man sich bei Wasserstofftranspiration, z. B. eine solche Röhre ebenfalls mit Wasserstoff vom Druck  $\frac{1}{2}(P+p)$  angefüllt, so ist der störende Einfluss der Gasdiffusion aufgehoben. Ueberhaupt ist es im allgemeinen rathsam, das Capillarprometer, so oft dasselbe direct der Flamme ausgesetzt werden sollte, mit einer Porzellanröhre zu umgeben.

Der mit Untersuchungen dieser Art vertraute Leser wird die vielen sachlichen wie mechanischen Schwierigkeiten bei dieser Untersuchung beurtheilen können. Zum Beispiel ziehen

sich die Fehler der ursprünglichen Temperaturcalibration sich laufend durch die ganze Arbeit hindurch. Ich habe deshalb es vorgezogen, von weiteren Ausführungen, wie z. B. der Ausmittlung der Capillarradien, der Gasreinigung und dergl., obgleich mir dadurch mancher Vortheil erwachsen wäre, abzusehen, um mich eben in der mir zu Gebote stehenden Zeit enger an das eigentliche Problem der Arbeit, die Ermittlung des Temperaturverhältnisses der Gaszähigkeit halten zu können.

Phys. Lab. U. S. Geological Survey, Washington,  
D. C., U. S. A.

## VII. *Eine Bestimmung des Ohm;* *von E. Dorn.*

(Im Auszuge der Königlich Academie der Wissenschaften zu Berlin  
vorgelegt am 5. Juli 1888.)

(Hierzu Taf. I Fig. 7–13.)

(Fortsetzung von p. 72.)

16. Ablenkungsbeobachtungen zur Ermittlung von  $M/H$ . — Unter den hierzu erforderlichen Grössen ist von besonderer Wichtigkeit der Magnetabstand. ( $r$  resp.  $r'$  in Formel (15)).

Die oben beschriebenen Lager (vgl. p. 32) gestatten, den Magnet in zwei verschiedenen Entfernungen wirken zu lassen. Um nun zunächst die Differenz dieser Entfernungen möglichst scharf zu erhalten, wurden die Lager vor der Befestigung auf ihrem Platze unter den Comparator gebracht und die beiden mit Ocularmikrometer versehenen Mikroskope desselben auf eine am Magnet (4) angebrachte Marke gerichtet, wenn derselbe von der einen, resp. der anderen Seite an das Glasstück angedrückt war. Dann wurde das Normalmeter substituiert und dieselbe Operation in der umgekehrten Richtung des Magnets wiederholt. Das Mittel

der Resultate an den zusammengehörigen Lagern gibt dann die mittlere Differenz der Entfernungen.

Am 29. Mai 1885 wurde dieselbe (auf  $10^0$  reducirt) gefunden für die Lager an

der Tangentenbussole	285,188 mm
am Galvanometer	285,389 "

Da die Grösse sich aus etwa 210 mm Stahl und 75 mm Glas zusammensetzt, wächst sie für  $1^0$  um  $210 \cdot 0,0_{,12} + 75 \cdot 0,0_{,85} = 0,0031$  mm.

Nachdem die Magnetlager auf den seitlichen Ansätzen der Tische festgekittet waren, wurde das Magnetometer der Tangentenbussole (und ebenso das Gehänge des Galvanometers) entfernt und zunächst eine Milchglasscala mit Hülfe leichter Klötzchen und auf die Ansätze gestellter Stativchen nahe symmetrisch so angebracht, dass die obere getheilte Seite in einer horizontalen Ebene mit der oberen Kante des in seinem Lager ruhenden Magnets sich befand. Die Unverrückbarkeit wurde durch reichliche Verwendung von Klebwachs gesichert.

Nun wurde eine durchsichtige Glasscala — die Theilung nach unten — mit einem Ende auf den Magnet, mit dem anderen auf die Milchglasscala gelegt, wobei eine Durchbiegung durch ein untergesetztes Stativchen verhütet wurde, und der Abstand einer Marke auf dem Magnet und des Endstriches der Milchglasscala von den benachbarten Theilstrichen mikroskopisch ausgemessen.<sup>1)</sup> Die Mikroskope waren dabei auf besondere Stative gesetzt.

Der Magnet wurde in unveränderter Richtung auf die andere Seite gebracht und ebenso verfahren; schliesslich wurde die ganze Messung für die umgekehrte Lage des Magnets wiederholt.

Sämmtliche benutzten Theilstriche der durchsichtigen Scala sind berichtigt, ebenso die Länge der Milchglasscala.

Nachstehend sind die Resultate der Messungen auf  $10^0$  reducirt angegeben.

1) Das Einlegen des Magnets brachte nach mikroskopischer Messung eine Horizontalverschiebung von noch nicht 0,01 mm hervor.



## Magnetabstände.

	Tangentenbussole		Galvanometer		Verlängerung für 1°
	$r$ (mm)	$r'$	$r$	$r'$	
1. Juni 1885	(1245,04)	(959,91)	(1245,23)	(959,88)	$r: 0,0110$ mm <sup>1)</sup>
	1245,07	959,88	1245,25	959,86	$r': 0,0078$ "
29. Juli 1885	(1245,22)	(960,10)			
	1245,26	960,07	1245,37	959,98	

Die eingeklammerten Werthe sind direct aus den Messungen abgeleitet, die anderen — welche später verwendet sind — in der Weise, dass die Differenz der gemessenen (s. o.) gleich gemacht ist, während die Summe unverändert bleibt.

An beiden Apparaten hat eine Vergrößerung der Entfernung stattgefunden (um 0,19, resp. 0,12 mm), daher ist für die Zwischenzeit interpolirt worden. Die Beobachtungen 2—5, vom Sommer 1885 sind infolge dessen mit einer kleinen Unsicherheit behaftet.

Um diese für die späteren Beobachtungen zu vermeiden, brachte ich auf den Lagern Marken — rothe Theilstriche auf Milchglas — an und controlirte den Abstand (nahe 2200 mm) derselben jedesmal mit einer langen Glasscala. Die späteren Angaben der Magnetabstände sind auf die Entfernung 2200,00 mm der Marken bezogen.

Ferner ersetzte ich die Lager an der Tangentenbussole durch neue und benutzte als Marke am Magnet eine kleine aufgeklebte Scala, wodurch die Messungen an Schärfe sehr gewannen.

Es wurde so erhalten:

Magnetabstände für 10° und 2200,00 mm Markenabstand.

	Tangentenbussole		Galvanometer	
	$r$ (mm)	$r'$	$r$	$r'$
26. u. 28. Sept. 1885	1246,60	961,43	1245,31	959,92 <sup>2)</sup>
1. Febr. 1886	1246,608	961,435	1245,33	959,94 <sup>2)</sup>

1) Nämlich:

$\frac{1}{2}$  (2283 . 0,0,85 + 210 . 0,0,12) und  $\frac{1}{2}$  (2133 . 0,0,85 — 210 . 0,0,12).

2) Die Differenz  $r - r'$  stimmte hier ohne weiteres mit dem früher durch die Substitutionsmessung ermittelten Werth.



Ueber die beiden Magnetometer, welche in der Tangentenbussole auch bei den Ablenkungsbeobachtungen zur Bestimmung von  $M/H$  Verwendung fanden, sind die erforderlichen Angaben schon gemacht. (Vgl. p. 33, 34 und 70 ff.)

In das Schöffchen des Galvanometers wurden als Hülsmagnete ein Hohlcyylinder (3) und ein Vollcyylinder (2) eingelegt. Es sind dies die in einer früheren Mittheilung<sup>1)</sup> mit den gleichen Ziffern bezeichneten Magnete; die auf dieselben bezüglichen Data stelle ich noch einmal kurz zusammen.

Magn.	Masse	Länge	Durchm. mm		Temp.- coëff.	Mom.	Inductioncoëff.	
	g	mm	innen	aussen		(mm, mg, sec)	längs	quer
2	318,05	209,63	—	15,71	0,03360	$6,53 \cdot 10^7$	$6,136 \cdot 10^4$	4440
3	106,46	160,93	12,05	15,80	0,0324 <sup>2)</sup>	$2,99 \cdot 10^7$	$2,269 \cdot 10^4$	3950

<sup>2)</sup> Für 20°.

Die Torsionsverhältnisse  $\theta'$  waren:

Hohlmagnet 3.

Messingdraht.

4. Juni 1885	0,01294	20. Oct. 1885	0,01298
2. Juli 1885	0,01301	9. Nov. 1885	0,01302
	0,01298	10. Nov. 1885	0,01304
			0,01301

Vollcyylinder 2.

Messingdraht

Eisendraht.

14. Nov. 1885	0,00585	30. Nov. 1885	0,001 669
		13. Dec. 1885	0,001 674
		22. Jan. 1886 <sup>3)</sup>	0,001 645

Polabstände.<sup>3)</sup> Da der Hohlmagnet 4 bei den Hauptbeobachtungen jedesmal aus zwei Entfernungen  $r$  und  $r'$  auf das Magnetometer der Tangentenbussole ablenkend wirkte, so liessen sich diese Beobachtungen zur Ermittlung des Polabstandes  $2a_1$  verwerthen.

Indem die rechte Seite von 15) für beide Entfernungen gleich gesetzt wird, folgt:

1) E. Dorn, Wied. Ann. 35. p. 275. 1888.

2) Wie schon erwähnt, war am 16. Januar 1886 der Draht gerissen und bei der Neubefestigung verkürzt. Vor der Verkürzung hätte nach dem Längenverhältniss sein sollen  $\theta' = 0,001 637$ ; das Mittel dieser Zahl und der beiden ersten ist 0,001 660.

3) Ueber den Polabstand der Magnetometer s. p. 69.

$$(37) \quad 2a_1^2 = \frac{r^2 \operatorname{tg} \psi' q - r^2 \operatorname{tg} \psi q'}{r^2 \operatorname{tg} \psi - r'^2 \operatorname{tg} \psi'},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$(38) \quad \begin{cases} q = r^2 - 3a^2(1 - 5 \sin^2 \psi) + \frac{p_1}{r^2}, \\ q' = r'^2 - 3a^2(1 - 5 \sin^2 \psi') + \frac{p_1'}{r'^2}, \end{cases}$$

$p_1$  und  $p_1'$  enthalten allerdings  $a_1$ , doch genügt für die Berechnung von  $q$  und  $q'$  ein Näherungswerth (z. B.  $\frac{5}{12}$  der Magnetlänge).

$a$  ist = 10,04 mm zu nehmen (vgl. p. 69); ferner war im Mittel sämtlicher Beobachtungen:

Sommer		Herbst	
$r = 1245,28_2$	$r' = 960,06_8$	$r = 1246,50_8$	$r' = 961,33_4$
$\psi = 2,04878^\circ$	$\psi' = 4,49471^\circ$	$\psi = 2,05500^\circ$	$\psi' = 4,50393^\circ$
woraus $a_1 = 89,20$ mm,		$a_1 = 89,72$ mm.	
Mittel $a_1 = 89,46$ .			

Dieser Werth ist für die Reduction der Beobachtungen benutzt.

Die besten Beobachtungen im Herbst (3., 6., 8., 13., 17. November), ähnlich behandelt, lieferten in guter Uebereinstimmung  $a_1 = 89,56$  mm, die weniger zuverlässigen Winterbeobachtungen mit Magnetometer I den etwas grösseren Werth 90,97.

Nachträglich habe ich noch in Halle einige Bestimmungen vorgenommen, bei welchen der auf eine durchsichtige Glasscala gekittete Magnet auf zwei berichtigten Milchglasscalen verschoben wurde. Verwendet wurde hierbei das zum Galvanometer gehörige Stativ und Magnetometer I; die für je drei Abstände in angemessener Abwechselung angestellten Beobachtungen wurden nach kleinsten Quadraten berechnet. Es ergab sich so:

27. u. 30. März 1888.			10. April 1888.			14. April 1888.		
$r$ (mm)	$\operatorname{tg} \psi$ beob.	$\operatorname{tg} \psi$ ber.	$r$ (mm)	$\operatorname{tg} \psi$ beob.	$\operatorname{tg} \psi$ ber.	$r$ (mm)	$\operatorname{tg} \psi$ beob.	$\operatorname{tg} \psi$ ber.
1349,605	0,027 929	0,027 923	1299,636	0,031 387	0,031 383	1299,636	0,031 396	0,031 402
1049,649	0,059 682	0,059 687	999,659	0,069 390	0,069 393	999,659	0,069 438	0,069 434
849,706	0,113 361	0,113 360	799,682	0,136 735	0,136 734	799,682	0,136 814	0,136 815
$a_1 = 88,96$ mm.			$a_1 = 88,02$ mm.			$a_1 = 88,00$ mm.		

Hiernach hätte sich der ganze Polabstand um 2 mm — etwa 1 Proc. — verringert; dies dürfte beim Transport geschehen sein, für den der Hohlmagnet 4 mit dem fast gleichstarken Magnet 2 durch zwei kleine Anker zu einem geschlossenen System vereinigt war.

Für Magnet 2 wurde beobachtet:

$$12. \text{ Januar } 1886. \quad r = 1246,41 \text{ mm}, \quad r' = 961,58 \text{ mm}, \\ \psi = 2,0480^\circ, \quad \psi' = 4,4826^\circ,$$

woraus nach (37), (38):  $a_1 = 87,5$ ; ferner nachträglich in Halle (8. April 1888):

$$\begin{array}{ccc|c} r = 1349,605 & 1049,649 & 849,706 & \\ \text{tg } \psi \text{ beob.} = 0,027\,873 & 0,059\,559 & 0,113\,085 & a_1 = 87,05 \text{ mm.} \\ \text{ber.} = 0,027\,871 & 0,059\,561 & 0,113\,085 & \end{array}$$

Der Polabstand hat also auch hier abgenommen; übrigens ist der Werth 87,5, wie aus der Berechnung der Ablenkungsbeobachtungen hervorging, jedenfalls noch etwas zu klein, und 88,3 dürfte der Wahrheit näher kommen.

Die später mitzutheilenden Rechnungen sind mit  $a_1 = 87,7$  mm geführt; dieser Werth hatte sich bei einer Näherungsrechnung ergeben und weicht von dem definitiven 87,5 so wenig ab, dass eine Wiederholung der Rechnungen überflüssig schien.

Die Beobachtungen über den Polabstand des kleinen Hohlmagnets sind folgende:

$$\begin{array}{l} 11. \text{ Juli } 1885. \quad r = 1220,84, \quad r' = 804,57, \quad (a = 10,04 \text{ mm}), \\ \psi = 0,97945^\circ, \quad \psi' = 3,4460^\circ, \\ \quad \quad \quad a_1 = 69,3 \text{ mm.} \\ 30. \text{ Dec. } 1887. \quad r = 938,58, \quad r' = 638,59, \quad (a^1) = 4,15 \text{ mm}), \\ \text{(Halle)} \quad \psi = 2,0392^\circ, \quad \psi' = 6,5304^\circ, \\ \quad \quad \quad a_1 = 69,8 \text{ mm.} \end{array}$$

Für die Rechnung verwendet ist das Mittel 69,6 mm.

Es mögen noch die aus dem Vorstehenden sich ergebenden Quotienten Polabstand/Magnetlänge zusammengestellt werden:

Magnet	4 (hohl)	2 (voll)	3 (hohl)
Länge	209,97	209,63	160,93
Polabstand	178,9	175,0	139,1
Quotient	0,852	0,835	0,864

1) Magnetometer I mit Magnet von 10 mm Länge.

Diese Zahlen schliessen sich eng an die Angaben von Hrn. F. Kohlrausch<sup>1)</sup> an, und zwar liefern auch bei mir die Hohlmagnete etwas höhere Werthe.

Da in jeder Reihe der Hauptbeobachtungen die Magnetabstände fast ungeändert blieben, und auch die Ablenkungen — welche auf  $p_2$  und  $p_4$  einen geringen Einfluss haben — nur unerheblich schwankten, so konnten in jeder einzelnen Reihe dieselben ein für allemal berechneten Werthe von  $p_2$  und  $p_4$  beibehalten werden, wie sie in nachstehendem Tafelchen vereinigt sind.

## Tangentenbusssole.

Magnetometer I. $a = 10,04$ ; $a_1 = 89,46$ .					Magnetometer II. $a = 8,91$ ; $a_1 = 89,46$ .	
	Sommer		Herbst u. Winter		Winter	
$r$ (mm)	1245,3	960,1	1246,5	961,3	1264,4	961,2
$\psi^0$	2,049	4,495	2,055	4,504	2,055	4,504
$p_2$	15706	15713	15706	15713	15770	15775
$p_4$	$1,802 \cdot 10^8$	$1,805 \cdot 10^8$	$1,802 \cdot 10^8$	$1,805 \cdot 10^8$	$1,827 \cdot 10^8$	$1,829 \cdot 10^8$
$\left[1 + \frac{p_2}{r^2} + \frac{p_4}{r^4}\right]$	1,01020	1,01726	1,01018	1,01721	1,01023	1,01729

## Galvanometer.

Hülfsmagnet: 3; $a = 69,6$ ; $a_1 = 89,46$ .			Hülfsmagnet: 2; $a = 87,7$ ; $a_1 = 89,46$ .			
	Sommer u. Herbst		Herbst		Winter	
$r$ (mm)	1245,4	960,0	1245,3	959,9	1245,3	959,9
$\psi^0$	1,999	4,361	1,998	4,343	2,007	4,364
$p_2$	1562	1893	— 6928	— 6406	— 6927	— 6400
$p_4$	$-2,561 \cdot 10^8$	$-2,512 \cdot 10^8$	$-3,985 \cdot 10^8$	$-3,984 \cdot 10^8$	$-3,984 \cdot 10^8$	$-3,984 \cdot 10^8$
$\left[1 + \frac{p_2}{r^2} + \frac{p_4}{r^4}\right]$	1,00090	1,00176	0,99537	0,99258	0,99536	0,99258

17. Localvariometer. — Das Localvariometer mit vier Ablenkungsmagneten nach Hrn. F. Kohlrausch besitzt vor den Bifilarinstrumenten dieser Art den grossen Vorzug, eine Unverrückbarkeit seiner Aufstellung nur für die kurze Zeit der Ablesungen in beiden Lagen des Rahmens zu beanspruchen.

Die zur Berechnung der Angaben dienende Formel wurde bereits angegeben. Ist für den Normalwerth der Horizontal-

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1883. Nr. 13. p. 396.

intensität  $H_0$  bei einer Temperatur  $\tau_0$  die Differenz  $v_0$  der Ablesungen in beiden Stellungen der Ablenkungsmagnete beobachtet, und haben für eine andere Zeit oder einen anderen Ort  $H$ ,  $\tau$ ,  $v$  die entsprechende Bedeutung, so ist:

$$(19) \quad \frac{H - H_0}{H_0} = f(v - v_0) - \mu_1 (\tau - \tau_0).^1)$$

Der Coëfficient  $\mu_1$  hängt mit dem Temperaturcoëfficienten ( $\mu_1$ ) des Momentes der Ablenkungsmagnete und dem Ausdehnungcoëfficienten  $\varepsilon$  des Rahmens zusammen durch die Beziehung:  $\mu_1 = (\mu_1) + 3\varepsilon$ .

Um ( $\mu_1$ ) zu bestimmen, klebte ich die später aus der ersten Hauptlage wirkenden Magnete 1)' und 3)' des Variometers  $V$  parallel nebeneinander in 39 mm Abstand auf eine Glasplatte (wobei jeder Magnet auf den anderen eine schwächende Kraft von etwa 1,5  $H$  ausübte), und verfuhr im übrigen nach der Weber'schen Methode.<sup>2)</sup> Ich erhielt im Mittel aus je fünf Beobachtungen (28. September 1884):

Temp. $t$	Magnetometer $n$		beob. — ber.	$n$ ber. = 524,71 — 0,8299 $t$ . Summeder Scalenverschiebungen bei folgeweiser Entfernung der Magnetchen und des Compensationsmagnets $N = 1287,2$ .
	beob.	ber.		
20,31	507,63	507,86	—0,23	
30,15	499,74	499,69	+0,05	
20,33	508,14	507,84	+0,30	
10,14	516,42	516,30	+0,12	
20,27	507,82	507,89	—0,07	
			$\pm 0,15$	

$$(\mu_1)' = 0,8299/1287,2 = 0,0,645.$$

Die für die zweite Hauptlage bestimmten Magnetchen 2)' und 4)' gaben ähnlich:

Temp. $t$	Magnetometer $n$		beob. — ber.	$n$ ber. = 518,56 — 0,5744 $t$ . $N = 1124,6$ .
	beob.	ber.		
20,52	506,46	506,77	—0,31	
29,97	501,24	501,34	—0,10	
20,67	506,88	506,69	+0,18	
10,04	512,68	512,79	—0,11	
20,26	507,05	506,92	+0,13	
			$\pm 0,17$	

$$(\mu_1)'' = 0,5744/1124,6 = 0,0,511.$$

1) Diese Formel setzt voraus, dass  $v_0$  von mässigem Betrage ist.  $v$  kann auch grössere Werthe besitzen, muss dann aber der Tangente der Ablenkung vom mittleren Scalentheile proportional gemacht werden.

2) Vgl. z. B. F. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik. 6. Aufl. p. 200 u. 201. Nr. 3.

Sind  $r_{13}$  und  $r_{24}$  die Abstände, aus welchen die in der ersten und zweiten Hauptlage befindlichen Magnetchen wirken, so wurde nach Anweisung von Hrn. F. Kohlrausch  $r_{13} = 1,12 \cdot r_{24}$  gemacht. Hiernach ist als Temperaturcoefficient der Combination anzusetzen:

$$(\mu_1) = \frac{(1,12)^3 \cdot 0,0_3511 + 2 \cdot 0,0_3645}{(1,12)^3 + 2} = 0,0_3590.$$

Wird der Ausdehnungscoefficient des kupfernen Rahmens nach Fizeau  $\epsilon = 0,0_3168$  gesetzt, so folgt schliesslich:

$$\mu_1 = 0,0_3590 + 3 \cdot 0,0_3168 = 0,0_3640.$$

Ich habe auch versucht, den Coefficienten  $\mu_1$  direct zu bestimmen, indem ich das Instrument durch Heizen des Zimmers auf verschiedene Temperaturen brachte, während ein zweites, in einem Raume constanter Temperatur aufgestellt, die zeitlichen Aenderungen von  $H$  zu eliminiren gestattete. Ich erhielt so  $\mu_1 = 0,0_3653$ , indessen war das heizbare Zimmer nicht ganz frei von magnetischen Störungen, sodass ich den Werth  $0,0_3640$  vorziehe.

Das Variometer  $V'$  diente nur zu Hilfsmessungen, während deren die Temperatur höchstens um einige Zehntelgrade schwankte; ich habe seinen Temperaturcoefficienten daher einfach auch  $= 0,0_364$  gesetzt.

Das Variometer  $V$  habe ich mehrmals justirt und dann jedesmal den Coefficienten  $f$  bestimmt. Derselbe kann erhalten werden nach:

$$f = \frac{\text{tg } \varphi}{4A},$$

wo  $\varphi$  den halben Drehungswinkel des Rahmens zwischen den Anschlägen und  $A$  den (wegen des Vorsatzglases<sup>1)</sup> corrigirten) Scalenabstand bedeutet. Andererseits kann man rein empirisch verfahren, indem man durch einen genäherten Magnet, für welchen  $M/H_0$  ermittelt ist, die Horizontalintensität um einen bekannten Bruchtheil von  $H$  verändert. Er war:

1) Dicke 3,33 mm; durch Vorsetzen wird das Bild um 1,16 mm genähert, wie mit Hülfe eines Mikroskopes direct gefunden wurde.

Variometer  $V$ .

Datum	$\eta$	$A$	$f$	$f$ (mit Magn.)	$f$ zur Rechnung
10. Oct. 1884	23,87 <sup>o</sup>	504,7	0,0,219	0,0,221	0,0,219
1. April 1885 <sup>*)</sup>	23,58	507,3	0,0,2151	0,0,2149	0,0,2151
				0,0,2148	Normalort: westliche Console.
16. Oct. 1885	23,58	507,8	0,0,2169	0,0,2164	0,0,2166
				0,0,2163	Normalort: Galvanometerplatz.

<sup>\*)</sup> Hier war ein dünnerer Faden eingezogen und sorgfältig austodirt.

Erwähnt sei noch, dass bei Variometer  $V$  zur Ablesung stets das mit dem Instrument verbundene Fernrohr und die zugehörige in  $\frac{1}{2}$  mm getheilte Scala benutzt wurde.

Das Variometer  $V'$  wurde durch ein unabhängig aufgestelltes Fernrohr abgelesen und nur die Aenderung des Standes bei einer Stellung des Rahmens verfolgt. Der Coëfficient  $f$  wurde hier nur empirisch ermittelt und erhalten:

7. April 1885  $f' = 0,0,1446$ ; 26. Juli 1885<sup>1)</sup>  $f' = 0,0,3254$ ;  
5. October 1885  $0,0,3248$ .

Uebrigens gab das Variometer  $V'$  die Aenderungen der Horizontalintensität in Bruchtheilen desselben Normalwerthes  $H_0$ , wie das erste, da für den benutzten Magnet  $M/H_0$  bestimmt war.

Die Temperatur  $\tau$  wurde durch ein Thermometer angezeigt, dessen Gefäss sich in der Höhe der Ablenkungsmagnete möglichst nahe an denselben befand. Beim Drehen des Rahmens von  $V$ , welches etwa zwei Secunden in Anspruch nahm, trug der Beobachter dicke Handschuhe, auch trat derselbe immer nur so lange an des Instrument heran, als zur Ablesung unbedingt nöthig war. Wenn künstliche Beleuchtung erforderlich war, wurde im Herbst das Licht einer Kerze, welche hinter einem mit Wasser gefüllten gläsernen Troge stand, durch eine Linse auf die Scala concentrirt, weniger gut bewährte sich im Winter eine Petroleumlampe, deren Strahlen nur die Scala trafen, während die Magnete durch einen mehrfachen Pappschild beschattet wurden.

Bei den örtlichen Intensitätsvergleichen, welche im

1) Von hier an Doppelmillimeterscala.

Herbst und Winter am Schlusse jeder Hauptbeobachtung vorgenommen wurden, hielt ich ein Streichhölzchen einige Augenblicke über die Scala.

Da mir im Sommer 1885 Zweifel an der Zuverlässigkeit des von mir benutzten Variometers  $V$  zur Bestimmung der örtlichen Aenderungen der Horizontalintensität aufgestiegen waren, so ermittelte ich am 18. October 1885 das Verhältniss von  $H$  an zwei Stellen  $G$  und  $T$  (Platz des Galvanometers und der Tangentenbussole bei den Hauptbeobachtungen) mit  $V$  und durch Schwingungen des Hohlagnets 4 in einem transportablen Magnetometer. Die zeitlichen Aenderungen von  $H$  wurden durch  $V'$  eliminirt.

Zeit		$V$ ( $f=0,02166$ )		$V'$ ( $f=0,03248$ )		Reduct. an $v^2$	$v$ reduc.	
		Ort	$v$ $i$	$v'$ $i'$				
10h 31' - 37')	Tgb.	-38,58	12,14	186,21	11,99	+5,24	-33,34	$v_T - v_g = -49,29$
10h 48' - 54'	Galv.	+11,48	12,25	186,58	12,05	+4,54	+16,02	$H_T - H_g$
11h 5' - 11'	Tgb.	-34,75	12,30	188,67	12,14	+1,53	-33,22	$\frac{H_T - H_g}{H_g} = -0,01068$

Schwingungsdauer (schon auf Normalstand von  $V'$  und gleiche Temperatur des Magnets reducirt).

Ort		Mittel
Galv.	2h 43' - 57': 13,3689; 2h 57' - 3h 11': 13,3681	13,3685
Tgb.	3h 46' - 59': 13,4409; 3h 59' - 4h 13': 13,4414; 4h 13' - 4h 27': 13,4406	13,4410
Galv.	5h 2' - 16': 13,3684; 5h 16' - 30': 13,3681	13,3683

Da die Torsionsverhältnisse  $\Theta_g = 0,00777$  und  $\Theta_T = 0,00785$  waren, folgt:

$$\frac{H_T}{H_g} = \frac{T_g^2}{T_T^2} \cdot \frac{(1 + \Theta_g)}{(1 + \Theta_T)} = 0,98914; \quad \frac{H_T - H_g}{H_g} = -0,01086$$

Zeit	Ort	$V$		$V'$		Reduct. an $v$	$v$ reduc.	
		$v$	$i$	$v'$	$i'$			
5h 49'—55'	Tgb.	-42,68	12,15	183,62	11,72	+8,30	-34,38	$v_T - v_g = -49,46$
6h 6'—13'	Galv.	+ 6,63	12,20	183,15	11,68	+8,74	+15,37	$H_T - H_g$
6h 25'—30'	Tgb.	-41,25	12,24	183,93	11,68	+7,45	-33,80	$\frac{H_T - H_g}{H_g} = -0,01069$

1) Mittel aus zwei Ablesungen zu 6' auseinander liegenden Zeiten.

2) Es ist bequem,  $v$  auf den Normalstand des Variometers  $V'$  und Normaltemperatur zu reduciren. Wie leicht ersichtlich, hat man zu dem



Die Differenz der Werthe  $-0,01086$  und  $-0,01069$  beträgt  $0,0317$ , d. h. etwa  $\frac{1}{6000}$ , und liegt innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler bei der Schwingungsmethode, womit der Zweifel als unbegründet nachgewiesen ist.

Für die Zuverlässigkeit der Hauptbeobachtungen ist es wesentlich, dass die Intensitätsänderungen an den in Betracht kommenden Stellen die gleichen sind. Beobachtungen auf Stein 1 und 2 führten zu folgendem Ergebniss:

Zeit (1885)	$V'$ (Stein 1)			$V$ (Stein 2)						
	$v'$	$i'$	$\frac{\Delta H'}{H_0}$	$v$	$i$	$\frac{\Delta H}{H_0}$	$\frac{\Delta H' - \Delta H}{H_0}$			
7. April 3h 50'	388,20 <sup>1)</sup>	10,16	+ 0,00076	-38,65	10,16	+ 0,00080	- 0,00004			
4h 40'	388,95	10,17	+	64	-38,95	10,17	+	72	-	8
8. April 8h 35'	395,10	9,45	+	21	-43,40	9,45	+	24	-	3
10h 53'	403,15	9,51	-	99	-48,95	9,51	-	100	+	1
12h 55'	398,80	9,82	-	56	-46,35	9,78	-	62	+	6
4h 0'	395,05	9,94	-	9	-43,70	9,95	-	16	+	7
9. April 8h 30'	395,30	9,69	+	3	-43,70	9,66	+	3	$\pm$	0
	394,94	9,82			-43,39	9,81			$\pm$	0,00004
	$=v_0$	$=i_0$			$=v_0$	$=i_0$				

1) Wachsendem  $H$  entsprechen abnehmende Scalentheile.

Die Differenzen betragen also nie  $\frac{1}{10000}$  und im Mittel

$\frac{1}{25000}$ .

Ferner wurde durch Versetzen von  $V$  erhalten (April 1885, Normalort: Westliche Console  $V_3$  Fig. 7)  $(H - H_0)/H_0 =$

	Stein 1	Stein 2	$V'$ (östl. Fenster)
8. April		-0,00948	-0,00646
20. April	-0,00762	-0,00947	
25. April	-0,00766	-0,00949	-0,00644
Mittel	-0,00764	-0,00948	-0,00645

Hieraus folgt noch für die Differenz Stein 1 - 2:  $+0,00184$ .

Nach diesen Resultaten hielt ich mich für berechtigt, die örtlichen Differenzen von  $H$  als constant anzusehen. Es ergab sich aber am 26. Juli 1885 als relative Differenz gegen die westliche Console:

Stein 1 - Cons.    Stein 2 - Cons.     $V_1$  (Oestl. Fenster) - Cons.  
 $-0,00698$      $-0,00898$      $-0,00651$

und daraus Stein 1 - Stein 2:  $+0,00200$ .

Ende  $(v_0' - v')f' + (i' - i)\mu_1/f$  zu  $v$  zu addiren. Oben ist  $v_0' = 190,00$  genommen, was übrigens für das Endresultat ohne Belang ist.

Diese Differenz, auf welche es besonders ankam, war also wenigstens bis auf 0,0<sub>3</sub>16 unverändert geblieben.

Die anderen, bis auf 0,0<sub>3</sub>5 ansteigenden Differenzen haben möglichenfalls in der Aenderung des inducirten Magnetismus im Eisen des Gebäudes durch die Temperatur ihren Grund.

Nach dem Umbau (vgl. p. 413) war die Differenz gegen Stein 1 (in Theilen der hier geltenden Horizontalintensität):

	Stein 2 — Stein 1	$V_1$ (Oestl. Fenster) — Stein 1
18. Oct. 1885.	—0,01063	—0,00669

ferner die Differenz zwischen Pfeiler und Fenster ( $V_2 - V_1$ )  
26. Jan. 1886: + 0,00108.

Anordnung und Aufstellung der Apparate. Die allgemeine Anordnung der Apparate geht wohl hinreichend deutlich aus dem Situationsplan (Fig. 7) hervor. Einzelne Erläuterungen will ich noch zusammen mit der Beschreibung der Aufstellung geben.

18. Stativ für das Galvanometer. Zunächst wurde die Ablenkungsschiene horizontal gemacht und der Drehpunkt der oberen Platte mit Hülfe eines Lothes genau unter den an der Decke befestigten Torsionskreis gebracht. Um noch die Ablenkungsschiene senkrecht zum magnetischen Meridian zu stellen, wurde auf der fixirten Tischplatte ein Blatt Papier mit zwei sich rechtwinklig schneidenden Linien befestigt, von denen die eine genau in die Richtung der Ablenkungsschiene fiel.

Auf der Tischplatte wurde nun ein 75 cm langer Magnet (hochkant) so lange verschoben und gedreht, bis er das 45 cm südlich von seinem Ende aufgestellte Magnetometer I nicht mehr aus dem Meridian ablenkte und mit einem Bleistift die Spur des Magnets auf dem Papier ausgezogen. Diese Operation wurde der Sicherheit wegen wiederholt, nachdem der Magnet um seine Axe durch 180° gedreht war. Die Linien fielen parallel aus und gaben die Richtung des magnetischen Meridians.

Der Winkel zwischen den Linien und der zur Ablenkungsschiene senkrechten Linie des Kreuzes liess sofort den Betrag der noch erforderlichen Drehung erkennen. Nachdem

diese ausgeführt war, wurden alle Einstellungen controlirt, und endlich die Füße des Stativs mit einem Gemisch von Leim und Gyps auf dem Stein befestigt.

Das Galvanometer selbst wurde so auf das Stativ gesetzt, dass der geometrische Mittelpunkt des Rahmens unter das Loth vom Torsionskreise fiel. Dann kittete ich den Multiplicatorrahmen an das Gehäuse und die Fusscheiben der Stellschrauben des letzteren auf die festgeklemmte Platte des Stativs.

Nachdem der Aufhängungsdraht sorgfältig von Torsion befreit war, legte ich den Hohlmagnet 4 in das Schiffchen ein und verschob den mittleren Stift des Torsionskreises, welcher den Draht trug, so lange in verticalem Sinne, bis der Magnet sich in der Mitte des Multiplicatorrahmens befand, was mit Hülfe eines entfernt aufgestellten Theodolithes constatirt wurde.

Weiter machte ich den um eine horizontale Axe beweglichen Spiegel des Galvanometers vertical, und zwar benutzte ich hierbei ein in gleicher Höhe mit dem Spiegel befindliches Fernrohr, welches bei der richtigen Spiegelstellung sein eigenes Objectiv gespiegelt sehen musste.<sup>1)</sup>

Dass die Windungsebene des Multiplicators nach dem Verfahren des Hrn. Schering in den Meridian gebracht wurde, ist bereits oben (p. 61) mitgetheilt. Um eine etwaige Veränderung bemerken zu können, wurde an dem Galvanometergehäuse ein Spiegel so befestigt, dass in ihm die Scala des Beobachtungsfernrohres erschien, wenn dieses passend geneigt wurde. Diese Vorsichtsmaassregel war besonders dann von Nutzen, wenn das Galvanometer von seinem Platze entfernt und wieder hingesezt werden musste.

Die Lager für den Magnet (zum Zweck der Ablenkungsbeobachtungen) wurden soweit auf der Unterfläche abgehobelt, bis der ablenkende Magnet in einer Horizontalen mit dem Hülfmagnet lag, und in einem solchen Abstände festgekittet, dass die Ablenkung des Hülfmagnets für beide merklich gleich ausfiel.

1) Im Herbst hatte eine kleine Veränderung stattgefunden, vgl. Messung der Scalenabstände.

Endlich wurde das Ablesefernrohr (von Steinheil, 52 mm Objectivdurchmesser, Montirung der von E. Hartmann ähnlich) aufgestellt, seine Fusscheiben auf der Platte des dreifüssigen Stativs und die Füße dieses letzteren auf dem Stein befestigt. Die Scala stellte ich anfänglich mit Benutzung rechter Winkel und durch Abmessung der Entfernung entsprechender Punkte vom Ocular zur Fernrohraxe senkrecht; weit besser bewährte sich aber folgendes Verfahren. Eine Kerze wurde mit dem Fernrohr anvisirt, sodass die Flammenspitze auf dem Fadenkreuz gesehen wurde. Dann trat der Beobachter hinter die Kerze und liess die (spiegelnde) Scala durch einen Gehülfen solange drehen, bis die Kerze und ihr Bild in der Scala mit der Fernrohraxe in einer Verticalebene erschien, wobei die beiden Bildchen im Objectiv die Beurtheilung erleichterten.

Die von Hrn. G. Wiedemann angegebene Methode<sup>1)</sup> erlaubt jedenfalls, eine noch grössere Schärfe zu erreichen, doch ist das oben beschriebene Verfahren mehr als ausreichend, sehr einfach und kann fast immer ausgeführt werden, ohne das Fernrohr von seinem Platze zu entfernen. An eine nicht spiegelnde Scala braucht man nur einen Spiegelstreifen anzudrücken.

19. Das Stativ für die Tangentenbussole wurde ähnlich, wie oben angegeben, justirt und das Magnetometer I sorgfältig mit der Magnetmitte in die Mitte der Windungen gebracht, wobei die gelegentlich der Ausmessung auf der Marmorplatte gezogenen Durchmesser gute Dienste leisteten.

Die Einstellung der Windungen in den Meridian erfolgte nach der Gleichheit der beiderseitigen Ablenkungen durch einen Strom; übrigens war von der vorläufig mit einer langen Magnetenadel ermittelten Lage nur eine Drehung um etwa  $0,5^\circ$  erforderlich. Die Magnetlager wurden wie beim Galvanometer angebracht.

Das Fernrohr (von E. Hartmann, 40 mm Objectivdurchmesser) erhielt fast genau den gleichen Scalenabstand wie das des Galvanometers und wurde auch fixirt.

1) G. Wiedemann, Abhandl. der Berl. Akad. 1884. Separatabdruck p. 10 ff.

Auch das aperiodische Galvanometer *PG* erhielt merklich gleichen Scalenabstand.

Durch einen Umbau des Gebäudes der Technischen Hochschule im Spätsommer 1885, bei welchem im zweiten Stockwerk Eisen verwendet wurde, erlitten die magnetischen Verhältnisse eine Veränderung. Infolge dessen wurde die Orientirung der Stative am 17. Oct. 1885 wiederholt; die Stellung der Tangentenbussole in den magnetischen Meridian wurde am 2. Jan. 1886 noch nachjustirt.

20. Im Sommer und Herbst, wo die Zimmertemperatur von der äusseren wenig abwich, stand das Variometer *V* zur Verfolgung der zeitlichen Aenderungen der Horizontalintensität (mit hintergesetztem Schirm) auf dem eichenen Brett des östlichen Fensters (*V*<sub>1</sub> Fig. 7), im Winter auf einer Console des Pfeilers daneben (*V*<sub>2</sub>).

Das Hilfsvariometer *V'* verblieb auf dem mittleren Fensterbrett.

21. Den schnellen Uebergang von einer Schaltung zur anderen ermöglichten zwei Quecksilberverbindungsnapfe *X*<sub>1</sub> und *X*<sub>2</sub> der Art, wie sie von dem Comité der British Association und auch von Hrn. Wild benutzt sind.<sup>1)</sup>

Die Drahtleitungen waren, soweit sie nicht über den Tischen verliefen, in etwa 2 m Höhe an ausgespannten Bindfäden geführt, und zwar stets Hin- und Rückleitungen lose umeinander geschlungen. Die Leitung von den Hauptwindungen des Galvanometers bis zu den Verbindungsnapfen *X*<sub>1</sub> und *X*<sub>2</sub> bestand aus demselben doppelt mit Seide besponnenen Drahte, welcher zum Galvanometer verwendet war, die übrigen Leitungen aus 1,5 mm starkem Kupferdraht mit wachsirter Baumwollenbespinnung.

Zur Beleuchtung wurde nie Gas, sondern fast ausschliesslich Kerzen verwendet.

Die Hauptbeobachtungen.

22. Dieselben zerfielen in drei Reihen, welche im Sommer und im Herbst 1885 und im Winter 1885/1886 ange stellt sind.

Jede einzelne Hauptbeobachtung umfasste

1) Fleeming Jenkin, Reports of the British Ass. 1873. p. 119.

am Vormittag:

1) Messung des Scalenabstandes für Galvanometer und Tangentenbussole,

2) Controle des Abstandes der Marken auf den Magnetlagern (im Herbst und Winter);

am Nachmittag, bez. Abend<sup>1)</sup>:

3) Vergleichung des Galvanometerwiderstandes mit  $WQ^2$ ,

4) Dämpfungsbeobachtungen für vier verschiedene Widerstände des Galvanometerkreises,

5) Bestimmung der Galvanometerfunction (zweimal),

6) Messung der Schwingungsdauer (zweimal 15 Minuten) und

6a) der Luftdämpfung,

7) Ermittlung von  $M/H$  aus der Ablenkung des Magnetometers der Tangentenbussole durch den Galvanometermagnet (in zwei Abständen),

8) Die entsprechende Beobachtung am Ort des Galvanometers mit 3 oder 2 als Hilfsmagnet,

9) Vergleichung der Horizontalintensität für den Ort des Galvanometers und der Tangentenbussole (im Herbst und im Winter).

Die Operation 4) dauerte  $\frac{3}{4}$  bis 1 Stunde, 3)—7) 3 bis  $3\frac{1}{2}$  Stunden, 3)—9) etwa  $4\frac{1}{2}$  Stunden.

Ausser mir selbst waren stets zwei Hilfsbeobachter thätig.

Das Variometer für Declination wurde abgelesen während 4), 5), 6a), 7)<sup>3)</sup>, 8), das Intensitätsvariometer während 4), 6), 7), 8).

Die Temperatur des hohlen Galvanometermagnets wurde durch ein eingeschobenes Thermometer gemessen vor 4), nach 6) und während 7), 8); das Thermometer in der Rolle unter dem Galvanometerkasten wurde abgelesen während 3), 4), 6).

Selbstverständlich wurde die Temperatur von  $WQ$  für 3) und 4) die des Stöpselrheostaten  $WK_1$  und des Nebenschlusses für 5) bestimmt.

1) Im Sommer wurde nur Nachmittags, im Winter nur Abends, im Herbst meist Abends (nur am 25. Oct., 1. Nov. u. 8. Nov. Nachm. beobachtet).

2) Hierbei war der Magnet stets herausgenommen.

3) Im Herbst und Winter.

Mitunter war die Reihenfolge der Operationen eine andere; immer aber kam 3) unmittelbar vor oder nach 4). Ferner wurde stets daran festgehalten, dass zwischen den Beobachtungen 4), 5), 6) der Magnet unberührt im Schiffchen des Galvanometers liegen blieb und auch keiner stärkeren magnetisirenden Wirkung unterworfen wurde. Aus diesem Grunde habe ich auch auf ein Abwechseln von Dämpfungs- und Widerstandsbeobachtungen verzichtet.

Ich bin der Ueberzeugung, dass bei der guten Temperaturconstanz des Beobachtungsraumes hierdurch geringere Fehler entstanden sind, als durch Aenderung des magnetischen Momentes infolge der Ströme bei Widerstandsmessung aufgetreten wären. Bei Differentialwicklung wäre allerdings eine Widerstandsmessung bei einliegendem Magnet möglich gewesen.

23. Bevor auf die Mittheilung der Hauptbeobachtungen selbst eingegangen wird, muss noch eine Vorfrage erledigt werden, nämlich die gegenseitige Beeinflussung der Instrumente.

Dieselbe wurde theils empirisch ermittelt, theils nach der Formel:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{M}{\varrho^3} [3 \cos(h_1 \varrho) \cos(h_3 \varrho) - \cos(h_1 h_3)]. \end{array} \right.$$

Hierin bedeutet  $h_1$  die Richtung der Axe des Magnets,  $M$  sein Moment,  $\varrho$  seine Entfernung von der seiner Wirkung unterworfenen Stelle,  $Y$  die Componente nach der Richtung  $h_3$ .

Nach derselben Formel kann auch die Fernwirkung eines Stromkreises berechnet werden, wenn  $M$  durch das Product von Stromstärke und Windungsfläche ersetzt wird.

a) Die auf dem Tisch I vereinigten Apparate übten auf das Hauptgalvanometer keine merkliche Ablenkung aus, auch unter Anwendung von 4 Chromsäureelementen statt des bei den Beobachtungen benutzten einen Daniells.





b) Eine Einwirkung des Chronographen liess sich nicht constatiren.

c) Der im Schiffchen des Galvanometers liegende Hohlmagnet 4 vermehrt am Orte der Tangentenbussole die Horizontalintensität um  $0,0,14$  abs., d. h. noch nicht  $\frac{1}{100\,000}$  des Betrages ( $M = 6,53 \cdot 10^7$ ,  $\varrho = 6000$  mm,  $h_1 \varrho = h_3 \varrho = 126,2^\circ$ ). Auch die — gleichgültige — ablenkende Wirkung ist gering:  $1,4$  Scalentheil.

d) Aus derselben Lage übt der Hohlmagnet 4 am Orte  $V_1$  des Localvariometers eine vermindernde Wirkung von  $0,0,106$  abs. aus ( $M = 6,53 \cdot 10^7$ ,  $\varrho = 6763$  mm,  $\angle h_1 \varrho = \angle h_3 \varrho = 114^\circ$ ). Indessen wurde der Magnet 4 vom 13. November ab, wenn er zum Zweck der Bestimmung von  $M/H$  herausgenommen war, sofort durch den fast genau gleich starken Magnet 2 ersetzt, sodass also bei diesen Beobachtungen eine Aenderung überhaupt nicht eintrat. Bis zum angegebenen Datum wurde Magnet 3 eingelegt, dessen Moment  $2,98 \cdot 10^7$ . Die relative Aenderung der Horizontalintensität ergibt sich hieraus zu  $+0,0,24$ ; eine Grösse, welche vernachlässigt werden darf.

e) Hingegen wirkt der auf den Lagern am Galvanometer  $O \rightarrow W$  liegende Magnet merklich auf die Stelle  $V_1$  ( $Y = 0,0,24 \cdot H$  empirisch). Daher wurde das Mittel der Variometerablesungen für beide Lagen des Magnets benutzt oder der Magnet während der Variometerbeobachtung fern von  $V_1$  vertical gestellt. Für die entsprechenden Beobachtungen an der Tangentenbussole war nur das letztere Verfahren anwendbar.

f) Die Ablesungen am Declinationsvariometer  $PG$  müssen von der Einwirkung des Magnets 4 befreit werden.

$h_1$  und  $h_3$  sind hier West-Ost gerichtet. Für die Beobachtungen am Galvanometer hat man (von Ost nach West auf den Lagern fortschreitend):

$$\begin{array}{cccc} \varrho = 7505, & 7644, & 8801, & 8995 \text{ mm,} \\ \angle h_1 \varrho = 61,0^\circ, & 59,1^\circ, & 47,6^\circ, & 46,4^\circ, \end{array}$$

und findet leicht die an den Daten von  $PG$  anzubringenden Reductionen in Scalentheilen<sup>1)</sup>:

1) Scalenabstand\*3036 Seth.



$$\mp 0,14, \quad \mp 0,10, \quad \pm 0,11, \quad \pm 0,12.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn der Nordpol nach West liegt. Empirisch fand sich im Mittel aus vier Reihen:

$$\mp 0,14, \quad \mp 0,12, \quad \pm 0,10, \quad \pm 0,11.$$

Befand sich der Magnet auf den Lagern an der Tangentenbussole, so waren die entsprechenden Reductionen im Mittel aus zahlreichen Beobachtungen (ebenfalls von Ost nach West fortschreitend):

$$4,48, \quad 6,09, \quad 4,47, \quad 2,86 \text{ (abs. Werthe).}$$

Doch ist hiervon nur selten Anwendung gemacht, wenn der Erdmagnetismus für eine unmittelbare Verwerthung der Ablesungen an der Tangentenbussole zu unruhig war.

g) Eine etwaige gegenseitige Einwirkung der Ströme in Galvanometer und Tangentenbussole fällt infolge der Ablesung für alle vier möglichen Stellungen der Commutatoren heraus.

h) Auf das Declinationsvariometer wirkt dagegen der Strom der Tangentenbussole etwas ein. Da  $h_1$  und  $h_3$  nach Ost zu zählen sind, so folgt die Ablenkung  $\zeta$  aus:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{Y}{H} = \frac{F \cdot J}{H \varrho^3} (3 \cos^2(h_1 \varrho) - 1),$$

wo  $F$  die Windungsfläche der Tangentenbussole bedeutet. Für diese selbst ist hinreichend nahe:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 F J}{R^3 H},$$

demnach: 
$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \varphi \frac{R^3}{2 \varrho^3} (3 \cos^2(h_1 \varrho) - 1.)$$

Statt des Verhältnisses der Tangenten darf wegen der Gleichheit des Scalenabstandes das der Scalentheile gesetzt werden; führt man noch ein  $R = 249$  mm,  $\varrho = 2914$  m,  $\angle h_1 \varrho = 88,2^\circ$ , so findet man die Reduction<sup>1)</sup>  $= N. 0,0,31$ , wo  $N$  die Ablenkung an der Tangentenbussole in Scalentheilen bedeutet.

24. Scalenabstände. — Die Messung der Scalenabstände erfolgte nach dem Verfahren von Hrn. F. Kohlrausch<sup>2)</sup>: berichtigte Glasmaassstäbe wurden an Spiegel und Scala vorsichtig angeschoben und ein nachträglich aus-

1) Diese ist der Ablenkung entgegengesetzt gleich.

2) F. u. W. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 8. 1882.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.

gemessenes<sup>1)</sup> Stück eines festen, langen Holzmaassstabes (40 × 46 mm) mit Pendeln aus Cocon darauf projecirt.

Um die Correction wegen der Spiegelneigung<sup>2)</sup> zu ermitteln, mass ich mit einem Kathetometer die Höhe  $S$  und  $F$  der Scalenstriche und der Drehungsaxe des Fernrohrs<sup>3)</sup> über der Spiegelmitte, woraus die Reduction am gemessenen Scalenabstande  $A$  nach  $(S+F)(S-F)/4A$  berechnet wurde.

Am Galvanometer ergab sich so im Sommer 0, für Herbst und Winter  $-0,23$  mm; an der Tangentenbussole für Magnetometer I  $-0,08$  mm (1. Juni 1885) und  $-0,10$  (15. Jan. 1886), im Mittel  $-0,09$  mm, für Magnetometer II am 16. Jan. 1886:  $-0,95$  mm und nach einer Veränderung der Einstellung am 18. Jan. 1886:  $-0,72$  mm.

Bei dem Spiegel der Tangentenbussole und des Galvanometers wie bei den Vorsatzgläsern der Tangentenbussole konnte ich eine Krümmung nicht constatiren.

Die Correctionen wegen der Vorsatzgläser und der (auf der Rückseite belegten) Spiegel habe ich unmittelbar auf optischem Wege bestimmt<sup>4)</sup>, zur Controle aber auch die Glasdicke gemessen. Die dieserhalb zu den direct erhaltenen Scalenabständen zu addirenden Grössen waren:

Galvanometer (kein Vorsatzglas):  $+2,28$  mm; Tangentenbussole, Magnetometer I, Sommer:  $-1,65 + 0,59 = -1,06$ ; Herbst und Winter (anderes Vorsatzglas)  $-1,32 + 0,59 = -0,73$  mm; Magnetometer II:  $-1,19 + 0,81 = -0,38$  mm.

Die Messung<sup>5)</sup> lieferte nach Anbringung aller erwähnten Reductionen den in Rechnung zu setzenden Scalenabstand in Millimetern. Statt die Scalentheile durch Multiplication mit  $1 + 0,0,85 s$  ( $s$  = Scalentemperatur) in Millimeter zu verwandeln, ist es bequemer, den Scalenabstand durch Division mit derselben Grösse in Scalentheilen auszudrücken. War

1) Diese Messung wurde jedesmal ausgeführt.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 31. p. 95. 1887.

3) Eigentlich ist  $F$  bis zum Durchstosspunkt der Visirlinie mit der Verticalebene der Scala zu rechnen; doch machte dies keinen merkbaren Unterschied.

4) Vgl. F. Kohlrausch, l. c. Das hier für Spiegel angegebene Verfahren habe ich übrigens seit drei Jahren benutzt.

5) Alle Längen sind auf das Genfer Meter bezogen und mit Temperaturcorrection versehen.

künstliche Beleuchtung benutzt, so wurde auf Grund einer vergleichenden Beobachtung die Scalentemperatur um  $2^{\circ}$  höher als die Zimmertemperatur angesetzt.

In folgender Tabelle sind die Scalenabstände  $A$  vereinigt.

Scalenabstand.

Datum	Galvanometer.			Tangentenbusssole.			
	$A$ (mm)	Diff.	$s^{\circ}$	$A$ (Seth.)	$A$ (mm)	Diff.	$A$ (Seth.)
31. Mai	3037,82	+0,20	17,3	3037,37	3034,90 <sup>1)</sup>		3034,45
21. Juni	,64	+0,02	20,0	7,12	3035,64	+0,02	5,12
28. "	,53	-0,09	22,1	6,96	,78	+0,16	5,23
5. Juli	,88	+0,26	20,1	7,35	,66	+0,04	5,13
12. "	,49	-0,13	22,1	6,90	,59	-0,03	5,00
19. "	,38	-0,24	22,2	6,81	,41	-0,21	4,84
	3037,62	$\pm 0,16$			3035,62	$\pm 0,09$	
25. Oct.	3038,22	-0,24	12,3	3037,90	3035,29	-0,16	3034,94
27. "	,77	+0,29	14,0	8,41	,44	-0,01	5,08
30. "	,30	-0,16	13,5	7,95	,44	-0,01	5,09
1. Nov.	,58	+0,12	11,2	8,29	,59	+0,14	5,30
3. "	,48	+0,02	12,3	8,16	,49	+0,04	5,17
6. "	,53	+0,07	12,1	8,22	,42	-0,03	5,11
8. "	,37	-0,09	10,3	8,10	,46	+0,01	5,19
	3038,46	$\pm 0,14$			3035,45	$\pm 0,06$	
13. Nov.	3038,84	+0,09	11,7	3038,54	3035,30	+0,02	3035,00
17. "	,66	-0,09	10,0	,40	25	-0,03	4,99
	3038,75	$\pm 0,09$			3035,28	$\pm 0,02$	
28. Dec.	3038,49	-0,10	9,3	3038,26	3037,61 <sup>1)</sup>		3037,38
29. "	,56	-0,03	9,8	,31	3038,02	+0,09	,77
30. "	,60	+0,01	10,0	,34	7,99	+0,06	,73
2. Jan.	,34	-0,25	8,5	,12	7,78	-0,15	,56
15. "	,69	+0,10	10,8	,41	3037,43 <sup>1)</sup>		,15
					3037,93	$\pm 0,10$	
16. Jan.	3038,35	-0,24	11,0	3038,07	3034,70	-0,11	3034,43
18. "	,83	+0,24	11,4	,54	,88	+0,07	,59
19. "	,82	+0,23	11,0	,54	,84	+0,03	,56
	3038,59	$\pm 0,15$			3034,81	$\pm 0,07$	

Selbst wenn man die Differenzen der unter einander vergleichbaren Werthe nur Beobachtungsfehlern zuschreiben wollte, wäre die Uebereinstimmung eine gute. Insbesondere beim Galvanometer haben aber thatsächliche Aenderungen des Scalenabstandes durch kleine Schiebungen und Temperaturänderungen im Gebäude u. s. f. stattgefunden.

1) Für die Mittel nicht verworthen, da eine kleine Aenderung der Einstellung vorgenommen.

25. Magnetabstände. — Nach den Ausführungen von p. 398 ff. können sofort die Magnetabstände zusammengestellt werden. Als Temperatur  $t$  ist die im Hohlmagnet beobachtete genommen.

Datum	Tangentenbussole.				Galvanometer.			
	$t$	Markenabst. 2200,00 mm	$r$ (mm)	$r'$ (mm)	$t$	Markenabst. 2200,00 mm	$r$ (mm)	$r'$ (mm)
31. Mai	17,7	—	1245,15	959,94	17,7	—	1245,33	959,92
21. Juni	19,7	—	,25	960,03	19,7	—	,40	,98
28. "	22,1	—	,29	,07	22,0	—	,44	960,02
5. Juli	20,3	—	,29	,07	20,2	—	,43	,01
12. "	23,0	—	,34	,11	23,0	—	,47	,04
19. "	22,4	—	,37	,14	22,4	—	,49	,06
25. Oct.	12,5	-0,18	1246,54	961,36	12,7	-0,07	1245,31	959,92
27. "	12,6	-0,17	,54	,36	12,3	-0,05	,32	,92
30. "	12,1	-0,17	,54	,36	12,2	-0,07	,31	,91
1. Nov.	11,4	-0,20	,52	,34	11,6	-0,08	,30	,90
3. "	10,8	-0,23	,49	,32	11,0	-0,07	,30	,90
6. "	10,6	-0,26	,48	,31	10,6	-0,07	,29	,90
8. "	10,7	-0,23	,49	,32	10,9	-0,07	,29	,90
13. "	10,1	-0,18	,51	,34	10,3	-0,06	,29	,90
17. "	8,4	-0,19	,49	,32	8,6	-0,05	,28	,89
28. Dec.	7,8	-0,38	,39	,22	8,1	-0,02	,29	,90
29. "	8,3	-0,42	,37	,21	8,3	-0,01	,30	,91
30. "	8,2	-0,39	,39	,22	8,3	-0,05	,28	,89
2. Jan.	7,7	-0,46	,34	,18	8,0	-0,04	,28	,89
15. "	9,2	-0,49	,35	,18	9,3	+0,02	,32	,93
16. "	9,2	-0,49	,35	,18	—	—	—	—
18. "	9,5	-0,51	,34	,17	9,6	-0,02	,31	,92
19. "	9,4	-0,57	,31	,14	9,6	+0,02	,32	,94

26. Verhältniss der Horizontalintensität für Galvanometer und Tangentenbussole. ( $H_T/H_g$ .)

Ich gehe zunächst auf diesen Gegenstand ein, da das erwähnte Verhältniss zur Reduction einiger anderer Beobachtungen gebraucht wird.

Es bedeuten  $H_g$  und  $H_T$  die innerhalb der betreffenden Apparate geltenden Werthe (also einschliesslich des Localeinflusses derselben); die Werthe ohne Local-einfluss der Apparate seien  $H_1$  und  $H_2$ . Nach p. 409 setze ich für den Sommer  $(H_2 - H_1)/H_1$  gleich dem Mittelwerthe  $-\frac{1}{2}(0,00184 + 0,00200) = -0,00192$ ; da ferner (vgl. p. 65 und 72) der Localeinfluss des Galvanometers  $-0,0313$ , derjenige der Tangentenbussole  $+0,0323$ , so wird  $(H_T - H_g)/H_g = -0,00192 + 0,0313 + 0,0323 = -0,00156$ , und:

$$H_T/H_g = 0,99844.$$

Im Herbst und Winter wurde  $H_T/H_g$  am Schlusse

jeder einzelnen Hauptbeobachtung bestimmt. Der Magnet des Variometers wurde hierbei genau (d. h. bis auf wenige Millimeter) an den Ort gebracht, welchen vorher die Magnete der Instrumente einnahmen. Nach dem Umsetzen des Localvariometers wartete ich stets acht Minuten und machte dann zwei Ablesungen im Zwischenraum von fünf bis sechs Minuten, von denen das Mittel verwerthet wurde. Die Art der Beobachtung und Berechnung möge aus folgendem Beispiel hervorgehen.

25. October 1885	Variometer $V$	Var. $V'$	Reduct. an $v$	$v$ reduc.	
Ort	$v$	$i$	$v'$	$i'$	
8h58' a. m.	T. -48,10	11,85	179,87	11,60	+14,45 -33,65 $v_2 - v_1 = -52,36$
9h12 - 18'	G. + 4,84	12,11	179,86	11,74	+14,12 +18,96 $\frac{H_2 - H_1}{H_1} = -0,01134^{2)}$
9h27 - 32'	T. -47,67	12,15	179,73	11,85	+14,52 -33,15
6h27' p. m.	G. + 11,00	12,65	185,20	12,10	+ 5,58 +16,58 $v_2 - v_1 = -51,88$
6h40' - 45'	T. -40,75	12,51	185,18	12,03	+ 5,81 -34,94 $\frac{H_2 - H_1}{H_1} = -0,01124$
6h55' - 7h0'	G. + 11,83	12,50	185,40	12,00	+ 5,43 +17,26 $\frac{H_T - H_g}{H_g} = -0,01088$
					p. m.: $H_T/H_g = 0,98912$

1) Vgl. p. 408 Anmerkung 2). Die Reduction ist berechnet nach  $(190,00 - v')(0,03248/0,032166) + (0,0340/0,032166)(i' - i)$ .

2) Nämlich  $-52,36 \cdot 0,032166$ .

Nachstehend sind die Resultate zusammengeschrieben.

### Verhältniss von $H$ für Galvanometer und Tangentenbusssole.

Dat.	$\frac{H_2-H_1}{H_1}$		$H_T/H_g^{1)}$	Dat.	$\frac{H_2-H_1}{H_1}$	$H_T/H_g$
	p. m.	a. m.			p. m.	
25. Oct.	-0,01124	-0,01134	0,98912	28. Dec.	-0,00954	0,99082
27. "	-0,00979	-0,00979	0,99057	29. "	-0,00955	0,99081
30. "	-0,01068	-0,01071	0,98968	30. "	-0,00955	0,99081
1. Nov.	-0,01072	-0,01069	0,98964	2. Jan.	-0,00958	0,99078
3. "	-0,01072	-0,01067	0,98964	15. "	-0,00994	0,99042
6. "	-0,01053	-0,01036	0,98983	16. "	-0,00998	0,99049 <sup>2)</sup>
8. "	-0,01052	—	0,98984	18. "	-0,01001	0,99036
13. "	-0,01043	—	0,98993	19. "	-0,00993	0,99044
17. "	-0,01052	—	0,98984			

1) Hierzu sind nur die Beobachtungen p. m. benutzt.

2) Von hier an Magnetometer II, also wegen Localeinfluss zu  $(H_2 - H_1)/H_1$  zu addiren  $+0,0313 + 0,0325 = 0,0338$ .

Die gute Uebereinstimmung der a. m. und p. m. erhaltenen Werthe beseitigt jedes Bedenken gegen die künstliche Beleuchtung; auch schwanken, vom 25. und 27. October abgesehen, die Verhältnisse nur um wenige Zehntausendtheile für die Beobachtungen jeder Reihe.

27. Vergleichung des Galvanometerwiderstandes mit  $WQ$ . — Hierbei wurde der Universalwiderstand  $UWP$  als Wheatstone'sche Brücke benutzt, und zwar  $B = 1000$ ,  $C = 10$  gemacht.<sup>1)</sup>

Die Ausführung der Messung wird am kürzesten aus einem Beispiel hervorgehen. 31. Mai 1885.

Die Enden der Leitung 5 und 6 sind in den Quecksilberverbindungsnapf  $X_1$  gesteckt. Im Zweige  $A$  des  $UWP$  erforderlich 25,006 S.-E. (uncorrigirt).<sup>2)</sup>

Die Drähte 1 und 5 kommen in  $X_1$ , 2 und 6 in  $X_2$ . In  $WQ$  sind alle Kupferbügel eingelegt.  $A$  (uncorrigirt) = 401,208 S.-E. Nachdem in  $WQ$   $1_1 + 1_2 + 1_3$  eingeschaltet ist:  $A$  (uncorrigirt) = 700,763 S.-E. Endlich wieder für die Galvanometerleitung allein 25,004 S.-E., Mittel 25,005.

Das Thermometer in der Rolle unter dem Galvanometerkasten zeigte  $17,44^\circ$ , das in  $WQ$   $17,21^\circ$ .

Zunächst sind die  $A$  wegen der Caliberfehler, Kupferdrähte und Stöpsel zu corrigiren. Nach p. 43 ist:

Widerst.	Corr.	Widerst.	Corr.	Widerst.	Corr.
20	+0,015	200	+0,021	500	+0,061
5	-0,004	100	+0,039	200	+0,021
4 Drähte	+0,002	100	+0,047	2 Drähte	+0,001
- 2 Stöpsel <sup>3)</sup>	-0,000	1	-0,001	- 2 Stöpsel	-0,000
		4 Drähte	+0,002		
		- 4 Stöpsel	-0,001		
	+0,013		+0,107		+0,083
$A$ (uncorr.)	25,005		401,208		700,763
$A$ (corr.)	25,018		401,315		700,846

Nach Abzug der Zuleitung Galv.:  $A$  (corr.) 376,297

Galv. +  $1_1 + 1_2 + 1_3$ : " 675,828

$1_1 + 1_2 + 1_3$ : 299,531

1) Der bereits p. 39 erwähnte auch hier verwendete Doppelschlüssel ist in den Situationsplan nicht eingetragen.

2) Interpolirt zwischen  $A = 25$  S.-E. und 26 S.-E.

3) Eigentlich  $17 - 2 = 15$  Stöpsel, doch heben sich die 17 Stöpsel heraus.

Die durch Herausnahme der Bügel zugefügten Widerstände sind (vgl. p. 55) in m/qmm Hg:

	für 10°	Reduction auf 17,21°
$1_1$	0,99424	0,00270
$1_2$	0,99094	0,00270
$1_3$	0,99453	0,00271
	2,97971	0,00811

$(1_1 + 1_2 + 1_3)$  für  $17,21^\circ = 2,98782$  m/qmm Hg. Demnach endlich Galv. + Leitung bis 1 und 2 für  $17,44^\circ$ :

$$2,98782 \cdot 376,297 / 299,531 = 3,75357 \text{ m/qmm Hg.}$$

Da bei den Dämpfungsbeobachtungen die Drahtenden 1 und 2 in  $X_2$  eingedrückt wurden, so ist dies (abgesehen von einer kleinen Correction wegen der Temperaturänderung) gerade derjenige Widerstand, welcher gebraucht wird.<sup>1)</sup>

War der kleinste bei den Dämpfungsbeobachtungen benutzte Widerstand Galv. +  $1_1$  und der grösste Galv. +  $1_1 + 1_2 + 1_3 + 1_4$ , so wurden auch diese Widerstände nach obigem Verfahren verglichen.

Ausser den Ergebnissen theile ich soviel von den Beobachtungen mit, dass die Rechnung controlirt werden kann. Unter  $A$  (corr.) steht der dem Galvanometer (resp. +  $1_1$ ) und der den drei zugefügten Einheiten entsprechende Betrag, der Widerstand des Galvanometers findet sich unter „beob.“. Anordnung I bedeutet, dass zum Galvanometer in  $WQ$  zugefügt war 0 und  $1_1 + 1_2 + 1_3$ , II:  $1_1$  und  $1_1 + 1_2 + 1_3 + 1_4$ , III: 0 und  $1_5 + 1_6 + 1_7$ .

#### Vergleichung des Galvanometerwiderstandes mit $WQ$ .

Dat.	Temp.		Anordnung	$A$ (corr.)		Galv. m/qmm Hg		Diff.
	$WQ$	Galv.				beob.	ber.	
31. Mai	17,21	17,44	I	376,297	299,531	3,7536	3,7561	-0,0025 <sup>2)</sup>
21. Juni	19,53	19,97	"	379,443	299,433	3,7902	3,7894	+0,0008
28. "	21,39	22,11	"	382,455	299,566	3,8206	3,8198	+0,0008
5. Juli	19,89	20,01	II	479,601	299,535	3,7905	3,7892	+0,0013
12. "	22,48	23,30	"	483,866	299,595	3,8359	3,8371	-0,0012
19. "	21,67	22,17	"	482,450	299,570	3,8210	3,8207	+0,0003

1) Auch der Widerstand innerhalb des Verbindungsnapfes ist hierin enthalten. Sei derselbe nämlich  $x$ , der Widerstand der Zuleitung nach dem  $UWP$ :  $\xi$ , so misst man bei den Operationen  $\xi + x$  und Galv. +  $\xi + 2x$ , sodass die Differenz Galv. +  $x$  liefert.

2) Hier war ein anderes Thermometer benutzt als später.

Dat.	Temp.		Anord- nung	A (corrig.)		Galv. m/qmm Hg		Diff.
	W	Q				beob.	ber.	
25. Oct.	12,41	12,38	"	469,219	299,558	3,6772	3,6773	-0,0001
27. "	11,79	11,62	"	468,195	299,544	3,6663	3,6661	+0,0002
30. "	11,56	11,33	"	467,884	299,571	3,6625	3,6619	+0,0006
1. Nov.	11,23	10,95	"	467,179	299,543	3,6555	3,6562	-0,0007
3. "	10,32	10,04	"	466,001	299,519	3,6429	3,6428	+0,0001
6. "	10,05	9,87	"	465,723	299,543	3,6394	3,6403	-0,0009
8. "	10,20	10,15	"	465,990	299,541	3,6423	3,6444	-0,0021
13. "	9,38	9,27	I	364,942	299,532	3,6306	3,6314	-0,0008
17. "	7,92	7,75	"	362,934	299,508	3,6088	3,6088	0,0000
28. Dec.	7,12	6,96	III	361,790	300,167	3,5961	3,5971	-0,0010
29. "	7,95	7,71	"	362,813	300,170 <sup>1)</sup>	3,6083	3,6083	0,0000
30. "	8,26	7,94	"	363,180	300,164	3,6115	3,6117	-0,0002
2. Jan.	6,66	6,56	"	361,183	300,145	3,5897	3,5912	-0,0015
15. "	8,87	8,67	"	364,359	300,198	3,6237	3,6225	+0,0012
16. "	8,94	8,69	"	364,316	300,234	3,6229	3,6228	+0,0001
18. "	8,97	8,79	"	364,522	300,194	3,6253	3,6243	+0,0010
19. "	8,93	8,72	"	364,380	300,204	3,6239	3,6232	+0,0007
±0,00075								

Um den Temperaturcoefficienten des Galvanometers genauer zu ermitteln und um einen Anhalt zu gewinnen, inwieweit das Thermometer in der Rolle die Temperatur des Galvanometers angibt, habe ich obige Beobachtungen durch eine quadratische Formel dargestellt:

$$W_t = 3,49313 + 0,015\,015\,t - 0,010868\,t^2 \\ = 3,49313 (1 + 0,004\,298\,t - 0,03111\,t^2).$$

Die hiernach berechneten Werthe stehen in der Columnne „ber.“ Der grössten Abweichung 0,0025 entsprechen etwa 0,17°, der mittleren 0,375 : 0,05°, ein recht befriedigendes Resultat.

Aus obiger Formel leitete ich noch die relative Zunahme der Leitungsfähigkeit des Kupfers ab:

$$\frac{1}{k_0} \left( \frac{dk}{dt} \right)_{13^\circ} = -0,00379,$$

ferner den Zuwachs des Widerstandes für 0,1° bei 10° und 20°: 0,0148, resp. 0,0146.

Widerstand des Galvanometerkreises für die Dämpfungsbeobachtungen. — Das logarithmische Decrement wurde für vier verschiedene Widerstände beobachtet. Mit dem kleinsten Widerstande (Galvanometer allein oder Galvanometer + 1<sub>1</sub>) wurde begonnen, dann dreimal je eine

1) ?



Einheit von  $WQ$  zugegeben und rückwärts dieselben Beobachtungen wiederholt. Die entsprechenden Werthe des logarithmischen Decrements sind dann zu Mitteln vereinigt, demnach sind auch nur die entsprechenden Mittelwerthe der Widerstände zu berechnen. Zu berücksichtigen ist hierbei die kleine Differenz der Galvanometertemperatur gegen die bei der Widerstandsmessung herrschende.

So war am 31. Mai 1885 für die Dämpfungsbeobachtungen die Temperatur des Galvanometers  $17,39^{\circ}$ . Für  $17,44^{\circ}$  war gemessen sein Widerstand  $3,75357$  m/qmm Hg; wegen der Differenz  $0,05^{\circ}$  ist abzuziehen  $0,0,74$ , also  $3,75283$  m/qmm Hg.

Da ferner während der Dämpfungsbeobachtungen in  $WQ$  die Temperatur  $17,14^{\circ}$  herrschte, so sind die Widerstände der benutzten Einheiten in m/qmm Hg:

$$1_1 = 0,99692, \quad 1_2 = 0,99361, \quad 1_3 = 0,99721,$$

sodass die in Rechnung zu setzenden Widerstände des Galvanometerkreises sind:

$$3,7528, \quad 4,7498, \quad 5,7434, \quad 6,7406 \text{ m/qmm Hg.}$$

Die erste Columnne des folgenden Täfelchens (nach dem Datum) enthält die Temperatur des Galvanometers zu Anfang und Ende der Dämpfungsbeobachtungen, die zweite bis fünfte die für die Rechnung benutzte Temperatur, die sechste die Temperatur von  $WQ$ , die folgenden die Widerstände, welche auf Grund von p. 55 u. 423 ff. leicht nachzurechnen sind, nachdem bereits (p. 423 ff.) angegeben, welche Stücke von  $WQ$  jedesmal verwendet wurden.

Widerstand des Galvanometerkreises für die  
Dämpfungsbeobachtungen.

*W*

Dat.	Temp. Galv.			Temp. $WQ$	Widerst. d. Galv.-Kreises m/qmm Hg					
31. Mai	17,39—17,39	17,39	—	—	—	17,14	3,7528	4,7498	5,7434	6,7406
21. Juni	20,07—19,97	20,07 <sup>1)</sup>	20,02	—	—	19,50	3,7909	4,7880	5,7825	6,7805
28. "	22,04—22,11	22,08	—	—	—	21,39	3,8202	4,8187	5,8139	6,8127
5. Juli	?—20,01	20,01	—	—	—	19,89	4,7885	5,7831	6,7814	7,7791
12. "	23,19—23,27	23,23	—	—	—	22,42	4,8337	5,8293	6,8285	7,8272
19. "	22,13—22,17	22,15	—	—	—	21,60	4,8192	5,8145	6,8134	7,8118

1) Durch ein Versehen war hier zuletzt nicht Galv. allein beobachtet, sondern Galv.  $+1_1$  wiederholt.

Dat.	Temp.	Galv.	Temp. WQ	Widerst. d. Galv.-Kreise m/qmm Hg
25. Oct.	12,43—12,38	12,40	— — —	12,37 4,6729 5,6649 6,6606 7,6559
27. "	11,62—11,70	11,67	11,70 11,71 11,72 <sup>2)</sup>	11,82 4,6623 5,6545 6,6502 7,6454
30. "	11,34—11,46	11,40	— — —	11,58 4,6587 5,6505 6,6459 7,6408
1. Nov.	10,96—11,03	10,99	— — —	11,22 4,6510 5,6427 6,6380 7,6328
3. "	10,07—10,18	10,12	— — —	10,31 4,6387 5,6300 6,6249 7,6194
6. "	9,89—9,97	9,94	— — —	10,06 4,6350 5,6262 6,6210 7,6154
8. "	10,18—10,28	10,23	— — —	10,23 4,6381 5,6294 6,6243 7,6187
13. "	9,27—9,47	9,38	— — —	9,41 4,6321 4,6265 5,6175 6,6121
17. "	7,76—7,88	7,82	7,83 7,85 7,85	7,94 3,6099 4,6038 5,5945 6,5885
28. Dec.	6,99—7,15	7,07	7,08 7,09 7,09	7,16 3,5978 4,5953 5,5888 6,5817
29. "	7,76—7,78	7,76	— — —	7,95 3,6091 4,6067 5,6005 6,5936
30. "	7,94—7,94	7,94	— — —	8,20 3,6115 4,6092 5,6031 6,5963
2. Jan.	6,56—6,76	6,67	6,68 6,69 6,69	6,73 3,5914 4,5897 5,5822 6,5750
15. "	8,66—8,70	8,68	8,67 — —	8,85 3,6238 4,6216 5,6157 6,6092
16. "	8,69—8,73	8,71	— — —	8,92 3,6233 4,6213 5,6154 6,6089
18. "	8,78—8,86	8,83	— — —	8,95 3,6260 4,6241 5,6183 6,6118
19. "	8,69—8,78	8,75	8,76 — —	8,91 3,6244 4,6225 5,6166 6,6101

## 2) Unregelmässiger Gang der Temperatur.

Eine Vergleichung der Temperaturen des Galvanometers mit denen während der Widerstandsmessung zeigt nur Differenzen von wenigen Hunderttheilen eines Grades. Die Vernachlässigung derselben würde das Endresultat etwa um  $\frac{1}{10000}$  verändern.

28. Dämpfungsbeobachtungen. — Um den Magnet in Bewegung zu setzen, wurde der Strom eines Leclanché-Elementes unter Einschaltung eines passenden Widerstandes (etwa 200 S.-E.) durch die Nebenwindung des Galvanometers geleitet und unterbrochen, wenn eine auf der Scala angebrachte Marke im Gesichtsfelde erschien. Abgelesen wurden dann drei (bei belastetem Magnet vier) aufeinander folgende Umkehrpunkte. Es war in dieser Weise möglich, den grossen Bogen bis auf einige Procent constant zu halten, und die erste Elongation abwechselnd nach den grossen und nach den kleinen Zahlen der Scala erfolgen zu lassen.

Wie schon erwähnt, verfolgte ein Hilfsbeobachter die Intensitätsvariationen am Variometer, ein zweiter die Declinationsänderungen am Galv. *PG*. Dämpfungsbeobachtungen, bei denen diese 0,1 Scalentheil überschritten, wurden verworfen.

Es wurde so eingerichtet, dass die erste Umkehr etwa 350 Scalentheile von der Ruhelage geschah, bei belastetem Magnet etwa 420 Scth.

WQ

0  
 $l_1$   
 $l_1 + l_2$   
 $l_1 + l_2 + l_3$   
 $l_1 + l_2$   
 $l_1$   
 0

Bei welchen eingeschalteten Widerständen beobachtet wurde, ist bereits angegeben; übrigens sind immer 6 bis 8, bei der mittleren Beobachtung 8 bis 12 Einzelbeobachtungen gemacht.

Die abgelesenen Umkehrpunkte wurden mit der Correction wegen der Theilfehler der Scala und auf Bogen versehen, das log. Decr.  $\lambda$  in Briggischen Logarithmen (5 Stellen) berechnet und auf  $\infty$  kleine Amplituden reducirt.

Waren durch  $WQ$  0, 1, 2, 3, 4 Einheiten zum Galvanometer zugefügt, so war  $\lambda$  (brigg) rund 0,70—0,76, 0,53—0,056, 0,43—0,45, 0,36—0,38, 0,31—0,32, und die Reduction 0,0013, 0,0010, 0,0<sub>3</sub>7, 0,0<sub>3</sub>5, 0,0<sub>3</sub>4, d. h.  $\frac{1}{600} - \frac{1}{800}$  des Ganzen. Bei belastetem Magnet erhob sich die Reduction für das erste der beiden immer hintereinander beobachteten Decremente auf  $\frac{1}{400}$ , war aber für das zweite nur noch etwa  $\frac{1}{2000}$ .

Zur Erläuterung der obwaltenden Verhältnisse diene folgendes Beispiel (28. Juni 1885).

Beob. Um- kehrp.	Red. Theilf. u. Bog.	Reduc. Um- kehrp.	Bogen	log(Bog.)	$\lambda$ (brigg.)	Red. auf $\infty$ kl. Bogen	$\lambda$ (brigg.) red.
176,6	+1,22	177,82	379,52	2,57924	0,70078	0,00106	0,70184
557,35	-0,01	557,34	75,59	1,87846	—	—	—
481,75	0,00	481,75	—	—	—	—	—

Aehnlich:

Erste Elongation		Hauptmittel
—	+	
0,70184	0,70194	0,70178
0,70185	0,70110	
0,70188	0,70203	
0,70186 $\pm 2$	0,70169 $\pm 39$	

$WQ$	$\lambda$ (brigg.), erste Elong.		$\lambda$ (brigg.) Mittel	Variom. <sup>1)</sup>		$\frac{H-H_m}{H_0}$	$\frac{H-H_m}{H_0}$	$\frac{H-H_m}{H_0}$	$\lambda$ (brigg.) red.	$\lambda$ (brigg.) zur Rechn.
	—	+		$\varphi$	$\tau$					
0	0,70186 $\pm 2$	0,70169 $\pm 39$	0,70178	+18,48	22,03	-0,0 <sub>3</sub> 10	-0,0 <sub>3</sub>	0,70175	0,70194	
$1_1$	0,53052 $\pm 12$	0,53037 $\pm 20$	0,53045	+18,40	21,98	—	09	—	2,053043	0,53037
$1_1+1_2$	0,42953 $\pm 10$	0,42945 $\pm 3$	0,42949	+18,63	21,95	—	02	—	0,42949	0,42950
$1_1+1_2+1_3$	0,36178 $\pm 11$	0,36166 $\pm 8$	0,36172	+19,10	21,98	+	06	+	1,036173	0,36173
$1_1+1_2$	0,42959 $\pm 15$	0,42938 $\pm 4$	0,42949	+19,28	22,00	+	09	+	2,042951	—
$1_1$	0,53029 $\pm 7$	0,53031 $\pm 28$	0,53030	+19,20	22,03	+	05	+	1,053031	—
0	0,70201 $\pm 26$	0,70225 $\pm 25$	0,70213	+18,95	22,03	—	00	—	0,070213	—
				+18,66	22,00					

1) Mittel aus je zwei bis drei Ablesungen.

Neben den log. Decr. sind die zugehörigen Variometerstände angegeben und weiter die daraus berechneten Abweichungen der Horizontalintensität von dem Werth  $H_m$ , welcher dem Mittel entspricht. Das in der folgenden Columnne enthaltene  $\frac{1}{2} \lambda \cdot (H - H_m) / H_0$  ist die Reduction an  $\lambda$  auf  $H_m$ <sup>1)</sup>, die übrigens hier und auch sonst so geringfügig ist, dass sie ohne Schaden hätte wegbleiben können. Hieran schliesst sich dann der reducirte Werth von  $H_m$  und das Mittel der entsprechenden, welches für die weitere Rechnung verworhet ist.

Die Luftdämpfung war (zugleich mit der Schwingungsdauer beobachtet)  $\lambda_{(\text{brigg.})} = 0,00165$ ; unter Benutzung der bereits angegebenen Werthe von  $W$  (vgl. p. 425 ff.) und  $H = 0,1448 \text{ m/qmm Hg} \times \text{sec}$  kann nun nach Umrechnung der  $\lambda$  in natürliche Logarithmen die in (6) definirte Grösse  $\Omega$  erhalten werden:

$$\Omega = 5,4511; \quad 5,4510; \quad 5,4517; \quad 5,4513;$$

$$\text{Mittel } \Omega = 5,4513 \pm 2.$$

Da die Reduction auf den Mittelwerth der Horizontalintensität, wie schon erwähnt, sehr geringfügig ist, so begnüge ich mich mit der Angabe der reducirten log. Decr. (in Briggschen Logarithmen), der aus ihnen folgenden  $\Omega$  und der mittleren Variometerstände. Das log. Decr. für den geöffneten Multiplicator steht in Klammern. (Folgt Tab. p. 429.)

Die Uebereinstimmung der verschiedenen an demselben Tage erhaltenen  $\Omega$  ist im allgemeinen eine sehr gute.

Man kann nun noch die an verschiedenen Tagen erhaltenen Mittelwerthe der  $\Omega$  untereinander vergleichen, indem man sie auf einen Normalstand des Intensitätsvariometers und eine Normaltemperatur des Galvanometermagnets reducirt. Vorausgesetzt ist hierbei Unveränderlichkeit der sonstigen Verhältnisse, insbesondere der für eine bestimmte Temperatur geltenden Momente des Galvanometermagnets und der Ablenkungsmagnete des Variometers, sowie des Verhältnisses der Horizontalintensität an den Plätzen des Galvanometers und Variometers.

1) Man ersieht dies am einfachsten, indem man in Formel (3) die Correctionen fortlässt und  $T_0$  durch  $H$  ausdrückt.

Logarithmische Decremente und Werthe von  $\Omega$ .

Dat.	$\lambda$ (brigg.)		Mittel	$\Omega$	Dat.	$\lambda$ (brigg.)		Mittel	$\Omega$
31. Mai	0,72019	0,72001	0,72010	5,4636	5. Juli	0,53454	0,53438	0,53446	5,4560
	0,54033	0,54036	0,54035	5,4610		0,43201	0,43233	0,43217	5,4571
	0,43614	0,43630	0,43622	5,4629		0,36365	0,36349	0,36357	5,4563
	0,36665	(0,00159)	0,36665	5,4631		0,31435	(0,00137)	0,31435	5,4564
	$v = + 5,17, \quad r = 17,89$			$5,4626 \pm 8$		$v = + 10,18, \quad r = 19,78$			$5,4565 \pm 3$
21. Juni	0,71002	— <sup>1)</sup>	0,71002	(5,4588)	12. Juli	0,52809	0,52769	0,52789	5,4460
	0,53477	0,53465	0,53471	5,4555		0,42806	0,42781	0,42794	5,4482
	0,43229	0,43239	0,43234	5,4558		0,36047	0,36054	0,36050	5,4466
	0,36372	(0,00157)	0,36372	5,4547		0,31214	(0,00164)	0,31214	5,4486
	$v = + 12,27, \quad r = 19,33$			$5,4553 \pm 4$		$v = + 22,99, \quad r = 23,38$			$5,4473 \pm 10$
28. Juni	0,70175	0,70213	0,70194	5,4511	19. Juli	0,53006	0,53001	0,53004	5,4493
	0,53043	0,53031	0,53037	5,4510		0,42924	0,42914	0,42919	5,4494
	0,42949	0,42951	0,42950	5,4517		0,36165	0,36147	0,36156	5,4503
	0,36173	(0,00165)	0,36173	5,4513		0,31282	(0,00159)	0,31282	5,4500
	$v = + 18,86, \quad r = 22,00$			$5,4513 \pm 2$		$v = + 18,82, \quad r = 22,40$			$5,4498 \pm 4$
25. Oct.	0,55127	0,55104	0,55116	5,4663	3. Nov.	0,55586	0,55565	0,55576	5,4643
	0,44282	0,44305	0,44294	5,4651		0,44596	0,44580	0,44588	5,4631
	0,37145	0,37141	0,37143	5,4660		0,37351	0,37343	0,37347	5,4635
	0,32140	(0,00145)	0,32040	5,4668		0,32190	(0,00152)	0,32190	5,4637
	$v = - 24,88, \quad r = 12,26$			$5,4661 \pm 5$		$v = - 27,84, \quad r = 9,79$			$5,4636 \pm 4$
27. Oct.	0,55191	0,55225	0,55208	5,4618	Nov.	0,55646	0,55667	0,55657	5,4669
	0,44357	0,44374	0,44366	5,4631		0,44664	0,44659	0,44662	5,4677
	0,37202	0,37194	0,37198	5,4650		0,37403	0,37399	0,37401	5,4678
	0,32087	(0,00145)	0,32087	5,4668	6. Nov.	0,32235	(0,00150)	0,32235	5,4683
	$v = - 21,53, \quad r = 11,67$			$5,4642 \pm 17$		$v = - 32,76, \quad r = 9,77$			$5,4677 \pm 4$
30. Oct.	0,55278	0,55286	0,55282	5,4632	Nov.	0,55638	0,55627	0,55633	5,4692
	0,44409	0,44408	0,44409	5,4634		0,44627	0,44630	0,44628	5,4679
	0,37223	0,37221	0,37222	5,4641		0,37388	0,37384	0,37386	5,4694
	0,32087	(0,00149)	0,32087	5,4629	8. Nov.	0,32214	(0,00145)	0,32214	5,4684
	$v = - 26,67, \quad r = 11,25$			$5,4634 \pm 3$		$v = - 35,94, \quad r = 10,26$			$5,4687 \pm 6$
1. Nov.	0,55398	0,55399	0,55399	5,4647					
	0,44504	0,44503	0,44504	5,4671					
	0,37274	0,37289	0,37282	5,4665					
	0,32145	(0,00144)	0,32145	5,4674					
	$v = - 32,51, \quad r = 10,92$			$5,4664 \pm 8$					
13. Nov. 2)	0,44049	0,44019	0,44034	3,4888	17. Nov. 2)	0,44373	0,44370	0,44372	3,4909
	0,33910	0,33905	0,33907	3,4899		0,34105	0,34119	0,34112	3,4918
	0,27662	0,27656	0,27659	3,4898		0,27806	0,27792	0,27799	3,4915
	0,23373	(0,00104)	0,23373	3,4894		0,23485	(0,00112)	0,23485	3,4920
	$v = - 32,45, \quad r = 9,52$			$3,4895 \pm 4$		$v = - 36,14, \quad r = 7,61$			$3,4915 \pm 4$

1) Durch ein Versehen war nicht Galvanometer allein beobachtet, sondern noch einmal Galvanometer  $\div 1$ .

2) Magnet mit den 100 g-Gewichten belastet.

Dat.	$\lambda$ (brigg.)	Mittel	$\Omega$	Dat.	$\lambda$ (brigg.)	Mittel	$\Omega$
28. Dec.	0,76442 0,76386 0,76414	5,4829		15. Jan.	0,75701 0,75682 0,75692	5,4826	
	0,56379 0,56418 0,56399	5,4824			0,56060 0,56052 0,56056	5,4848	
	0,45126 0,45125 0,45126	5,4833			0,44888 0,44889 0,44889	5,4830	
	0,37760 (0,00144) 0,37760	5,4850			0,37595 (0,00148) 0,37595	5,4848	
	$v = -30,30, \quad r = 7,83$	5,4834 $\pm 8$			$v = -34,96, \quad r = 9,11$	5,4838 $\pm 10$	
29. Dec.	0,76060 0,76070 0,76065	5,4807		16. Jan.	0,75554 0,75581 0,75568	5,4751	
	0,56221 0,56222 0,56222	5,4805			0,55975 0,55972 0,55974	5,4777	
	0,45006 0,45020 0,45013	5,4818			0,44834 0,44845 0,44840	5,4775	
	0,37670 (0,00147) 0,37670	5,4822			0,37576 (0,00146) 0,37576	5,4823	
	$v = -26,77, \quad r = 8,29$	5,4813 $\pm 7$			$v = -26,84, \quad r = 9,31$	5,4782 $\pm 20$	
30. Dec.	0,75934 0,75936 0,75935	5,4764		18. Jan.	0,75544 0,75540 0,75542	5,4784	
	0,56149 0,56169 0,56159	5,4778			0,55935 0,55930 0,55930	5,4782	
	0,44948 0,44958 0,44953	5,4765			0,44816 0,44812 0,44812	5,4783	
	0,37637 (0,00156) 0,37637	5,4786			0,37525 (0,00137) 0,37525	5,4791	
	$v = -22,57, \quad r = 8,25$	5,4773 $\pm 8$			$v = -25,59, \quad r = 9,28$	5,4785 $\pm 3$	
2. Jan.	0,76587 0,76539 0,76563	5,4812		19. Jan.	0,75539 0,75575 0,75557	5,4763	
	0,56515 0,56520 0,56518	5,4846			0,55974 0,55987 0,55981	5,4800	
	0,45196 0,45177 0,45187	5,4835			0,44816 0,44823 0,44820	5,4768	
	0,37788 (0,00143) 0,37788	5,4833			0,37562 (0,00144) 0,37562	5,4817	
	$v = -29,60, \quad r = 7,59$	5,4832 $\pm 9$			$v = -27,04, \quad r = 9,46$	5,4787 $\pm 22$	

Um die Reductionsformel zu erhalten, ersetze man in der Formel (7)  $\mathfrak{M}$  durch  $M$  und  $T_0$  durch  $\pi K^{1/2} H^{-1/2} M^{-1/2}$ , wodurch dieselbe übergeht in:

$$\varpi = \frac{2 \cdot 10^{10}}{\pi} \frac{K^{1/2} \Omega H^{1/2}}{G^2 M^{3/2}}.$$

Hierin ist  $\varpi$  und  $G$  als constant anzusehen; ferner hat man (der Index  $n$  deutet Normalwerthe an):

$$M = M_n [1 - \mu(t - t_n)]; \quad K = K_n [1 + \kappa(t - t_n)],$$

sodass die Reduction von  $\Omega$  auf die Normalwerthe wird:

$$\Omega_n - \Omega = \Omega \left[ \left( \frac{3\mu}{2} + \frac{\kappa}{2} \right) (t - t_n) + \frac{1}{2} \frac{H - H_n}{H_0} \right].$$

Da  $\mu = 0,0,3281$ , für den unbelasteten Magnet  $\kappa = 0,0,3278$ , für den belasteten  $\kappa = 0,0,312$ , so ergibt sich  $\frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}\kappa = 0,0,435$ , resp.  $0,0,437$ .

Als Temperatur des Magnets ist die des Thermometers in der Rolle (vgl. p. 425 ff.) angenommen; die Aenderungen von  $H$  gegen die später anzuführenden Normalstände folgen leicht aus den  $v$  und  $r$ .

Der Kürze wegen theile ich nur das Resultat mit.<sup>1)</sup>

1) Im Früheren sind alle zur Controle der Rechnung nöthigen Data enthalten.

$\Omega$  auf Normalstände reducirt.

Sommer.		Herbst.		Magnet belastet		Winter.	
$t_n = 20^\circ$ , $v_n = + 10,0$ , $i_n = 20^\circ$		$t_n = 10^\circ$ , $v_n = - 30,0$ , $i_n = 10^\circ$				$t_n = 10^\circ$ , $v_n = - 30$ , $i_n = 10^\circ$	
Dat.	$\Omega_n$	Dat.	$\Omega_n$	Dat.	$\Omega_n$	Dat.	$\Omega_n$
31. Mai	5,4573	25. Oct.	5,4708	13. Nov.	3,4885	28. Dec.	5,4800
21. Juni	5,4579	27. "	5,4703	17. "	3,4885	29. "	5,4808
28. "	5,4579	30. "	5,4665		3,4985	30. "	5,4800
5. Juli	5,4570	1. Nov.	5,4657		$\pm 0$	2. Jan.	5,4797
12. "	5,4567	3. "	5,4656			15. "	5,4793
19. "	5,4559	6. "	5,4663			16. "	5,4782
	5,4571	8. "	5,4653			18. "	5,4796
	$\pm 6$		5,4659			19. "	5,4785
			$\pm 4$				5,4795
							$\pm 6$

Bei der Bildung des Mittels im Herbst sind die beiden ersten Beobachtungen nicht berücksichtigt, da Grund zu der Annahme vorliegt, dass das Verhältniss von  $H$  für den Platz des Galvanometers und Variometers seitdem sich änderte. Multiplicirt man noch das Resultat für den belasteten Magnet mit  $\sqrt{4,5141 \cdot 10^9 / 1,8388 \cdot 10^9}$ , der Wurzel aus dem Verhältniss der Trägheitsmomente, so kommt 5,4658 fast identisch mit dem ohne Belastung beobachteten Werthe.

Uebrigens sind die drei Serien untereinander nicht vergleichbar.

29. Bestimmung der Galvanometerfunction. — Im Situationsplan ist die für diese Messung benutzte Schaltung eingezeichnet.

Als Beispiel zur Erläuterung des Verfahrens wähle ich die Beobachtung vom 31. Mai.

Die Stände des Galvanometers sind aus fünf aufeinander folgenden Umkehrpunkten berechnet, die der Tangentenbussole aus den fünf gleichzeitigen Ablesungen. Die Scalentheile haben die Theilfehlercorrection und die Reduction auf Bogen erhalten; auch sind die Declinationsänderungen mit Hülfe der (vom Einfluss der Tangentenbussole befreiten) Ablesungen an P. G. eliminirt.

In  $WK_1$  der Stöpsel 5000 gezogen. Temperatur im Benzol (Nebenschluss):  $17,06^\circ$ , in  $WK_1$ :  $17,02^\circ$ .



	Ruhelage					Ablenkung <sup>1)</sup>	
Galv.	495,80	215,39	215,36	776,37	776,42	495,81	$n = 280,51$ $q = 2,6457^{\circ}$
Tgb.	491,89	789,20	195,23	789,07	195,51	491,53	$N = 296,88$ $\Phi = 2,8028^{\circ}$

In  $WK_1$  5000 + 2000 gezogen; Temperatur im Benzol: 17,09°, in  $WK_1$  17,02°.

	Ruhelage					Ablenkung	
Galv.	495,81	295,05	295,13	696,32	696,34	495,62	$n = 200,62$ $q = 1,8922^{\circ}$
Tgb.	491,53	788,43	195,45	788,19	195,61	491,53	$N = 296,39$ $\Phi = 2,7981^{\circ}$

Die absoluten Werthe von  $q$  sind 0,046176 und 0,033025.

Durch Interpolation zwischen dem 27. Mai und 13. Juni (vgl. p. 45) ergibt sich für 10°:  $W_n = 9,9662 s_1$ ; zur Reduction auf 17,06°, resp. 17,09° ist zu addiren  $7,06 \cdot 0,00359 = 0,0253$ , resp.  $7,09 \cdot 0,00359 = 0,0254$ , somit  $W_n = 9,9915 s_1$ , resp.  $9,9916 s_1$ .

An 5000 ist zunächst die Calibercorrection (vgl. p. 44 unter 18. Juni) + 2,90 und die Temperaturreduction +  $5000 \cdot 0,03395 \cdot 7,02 = + 13,85$  anzubringen. Hierzu kommt das Galvanometer mit  $3,77 s_1$ <sup>2)</sup> und die Leitung von den Klemmen an  $W_n$  bis zu den Verbindungsnapfen mit  $0,07 s_1$ . Im ganzen wird also  $W_g = 5020,59 s_1$  und ebenso für die zweite Beobachtung  $7025,98 s_1$ .

Weiter ergibt sich nach p. 70 die Constante der Tangentenbussole  $A = 7,9185$ ; mit Benutzung von  $\beta = 0,00610$  (p. 70) und  $\eta' = 1,627$  (p. 62) folgt endlich aus Formel (23): ( $p_0 H_T$ ) = 60,180 und 60,195, im Mittel  $60,187 \pm 7$ .

#### Bestimmung der Galvanometerfunction.

Datum	Temp.		$W_n (s_1)$	$W_g (s_1)$	$n$	$N$	$q^{\circ}$	$\Phi^{\circ}$	$(p_0 H_T)$	Mittel
31. Mai	17,06	17,02	9,9915	5020,6	280,51	296,88	2,6457	2,8028	60,180	60,187
	17,09	17,02	9,9916	7026,0	200,62	296,39	1,8922	2,7981	60,195	$\pm 7$
21. Juni	19,50	19,27	10,0016	4018,5	457,13	389,03	4,3119	3,6719	60,204	60,206
	19,53	19,29	10,0017	4018,6	281,48	238,37	2,6551	2,2499	60,206	$\pm 1$
28. "	21,49	21,03	10,0090	4021,5	275,24	233,12	2,5964	2,2003	60,191	60,191
	21,52	21,04	10,0091	4021,5	454,84	387,15	4,2905	3,6541	60,191	$\pm 0$
5. Juli	19,79	19,82	10,0032	4019,4	277,02	234,54	2,6128	2,2138	60,212	60,219
	19,80	19,82	10,0032	5026,2	289,78	306,56	2,7332	2,8935	60,226	$\pm 7$
12. "	22,58	22,15	10,0135	5030,8	288,82	305,72	2,7245	2,8857	60,191	60,201
	22,61	22,16	10,0136	4023,4	275,12	232,93	2,5953	2,1987	60,211	$\pm 10$
19. "	21,68	21,33	10,0105	4022,0	275,83	233,60	2,6020	2,2051	60,192	60,193
	21,71	21,35	10,0106	5029,2	287,38	304,31?	2,7110	2,8726	60,193	$\pm 0$

1) Scalenabstand s. p. 419.

2)  $3,75 \text{ m/qmm Hg} = 3,77 s_1$ .



Datum	Temp.		$W_n(s_1)$	$W_g(s_1)$	$n$	$N$	$\varphi^\circ$	$\Phi^\circ$	$(p_0 H_T)$	Mittel
	Benz.	$WK_1$								
25. Oct.	12,30	12,09	9,9793	5011,2	283,11	302,11	2,6698	2,8516	59,651	59,662
	12,33	12,10	9,9794	5011,2	408,68	437,21	3,8539	4,1269	59,673	$\pm 11$
27. "	11,99	11,87	9,9783	5010,7	413,77	432,07	3,9012	4,0782	59,750	59,738
	12,06	11,87	9,9785	4006,2	356,80	304,76	3,3641	2,8766	59,727	$\pm 11$
30. "	11,66	11,66	9,9773	5010,3	414,81	443,69	3,9116	4,1879	59,697	59,701
	11,76	11,68	9,9776	4005,9	357,88	305,85	3,3748	2,8869	59,705	$\pm 4$
1. Nov.	11,23	11,26	9,9758	5009,5	410,68	439,01	3,8722	4,1434	59,722	59,709
	11,27	11,27	9,9760	5009,5	284,01	302,83	2,6779	2,8582	59,696	$\pm 13$
3. "	10,71	10,44	9,9742	5007,9	403,59	431,30	3,8056	4,0709	59,719	59,719
	10,82	10,44	9,9746	4003,8	348,88	297,94	3,2897	2,8122	59,720	$\pm 0$
6. "	10,14	10,22	9,9726	5007,4	407,16	435,70	3,8392	4,1125	59,646	(59,643)
	10,22	10,23	9,9729	5007,5	281,27	300,14	2,6521	2,8330	59,639	$\pm 3$
8. "	10,40	10,32	9,9738	5007,6	416,32	445,15	3,9257	4,2016	59,709	59,707
	10,42	10,32	9,9739	4003,6	274,70	234,26	2,5903	2,2111	59,704	$\pm 2$
13. "	9,82	9,59	9,9727	5016,2	419,38	449,00	3,9540	4,2382	59,733	59,716
	9,87	9,60	9,9729	7015,6	301,17	449,26	2,8395	4,2406	59,699	$\pm 17$
17. "	8,26	8,10	9,9678	5003,2	418,98	447,83	3,9503	4,2271	59,709	59,717
	8,31	8,12	9,9680	5003,3	289,24	308,12	2,7271	2,9084	59,725	$\pm 8$
28. Dec.	7,43	7,24	9,9899	5001,6	406,15	430,94	3,8295	4,0645	60,029	60,033
	7,48	7,25	9,9901	6999,0	203,32	300,29	1,9171	2,8322	60,037	$\pm 4$
29. "	7,83	8,00	9,9912	8999,1	234,64	445,32	2,2124	4,1996	60,029	60,025
	7,88	8,00	9,9913	5003,1	290,76	307,80	2,7416	2,9028	60,020	$\pm 4$
30. "	7,93	8,27	9,9915	5003,6	410,81	436,12	3,8734	4,1129	60,023	60,027
	7,98	8,27	9,9917	7001,9	203,90	301,28	1,9225	2,8413	60,030	$\pm 3$
2. Jan.	7,19	6,74	9,9898	5000,6	405,81	430,51	3,8265	4,0601	60,035	60,037
	7,26	6,76	9,9900	8994,6	226,95	430,48	2,1400	4,0598	60,039	$\pm 2$
15. "	8,70	9,02	9,9967	5005,1	413,65	439,28	3,9001	4,1434	59,983	59,972
	8,74	9,02	9,9968	7004,0	204,88	302,95	1,9317	2,8575	59,961	$\pm 11$
16. "	8,77	9,07	9,9971	5004,5	391,36	414,94	3,6904	3,9174	59,955	59,970
	8,87	9,07	9,9974	4001,0	265,76	224,70	2,5060	2,1213	59,984	$\pm 11$
18. "	9,07	9,06	9,9981	4001,0	270,83	229,07	2,5535	2,1625	59,958	
	8,85	9,04	9,9974	5004,5	412,58	437,38	3,8899	4,1291	59,991	59,989
19. "	8,92	9,04	9,9976	5004,5	217,93	230,08	2,0547	2,1721	59,986	$\pm 2$

In  $WK_1$  sind stets die Combinationen benutzt 2000 + 1000 + 1000', 5000, 5000 + 2000, 5000 + 2000 + 1000 + 1000'; nur am 13. Nov. war (noch von einer früheren anderweitigen Messung her) auch noch 10 gezogen. Am 6. Nov. muss ein Versehen vorliegen; zur Rechnung ist auch für diesen Tag später das am 8. Nov. erhaltene 59,707 verwendet, und ähnlich am 18. Jan., wo die erste Messung ganz misslungen war, 59,980.

Wenn man die Lage des Magnets innerhalb der Multiplicatorwindungen und die Vertheilung des Magnetismus im Galvanometermagnet als constant voraussetzt, hängt  $(p_0 H_T)$  nur noch vom Torsionsverhältniss  $\theta$  des Galvanometers und dem Verhältniss der Horizontalintensität  $H_T/H_g$  ab. Man

erkennt leicht, dass man alle Beobachtungen untereinander vergleichbar macht, wenn man mit dem Factor  $(H_s/H_T)(1+\theta)$  multiplicirt.

Das Resultat dieser Operation ist folgendes:

Vergleichung der  $(p_o H_T)$ .

Sommer		Herbst		Winter		
Dat.		Dat.		Dat.		
31. Mai	60,654	25. Oct.	60,693	28. Oct.	60,711	60,709 ±5
21. Juni	60,672	27. "	60,682	29. "	60,704	
28. "	60,658	30. "	60,699	30. "	60,705	
5. Juli	60,686	1. Nov.	60,709	2. Jan.	60,717	60,675 ±8
12. "	60,668	3. "	60,720	15. "	60,673	
19. "	60,660	8. "	60,695	16. "	60,673	
	60,666	13. "	60,694	18. "	60,663	
	±9	17. "	60,700	19. "	60,690	
			60,699			
			±8			

Eigenthümlich ist das Verhalten im Winter, indem die Werthe deutlich in zwei Gruppen zerfallen, deren jede in sich eine befriedigende Uebereinstimmung zeigt. In der Verwendung des Magnetometers II seit dem 16. Jan. liegt der Grund der Differenz nicht, da die letzte Beobachtung mit Magnetometer 1 bereits die Abnahme zeigt.

Man könnte an eine Drehung des Multiplicatorrahmens infolge des Abnehmens und Aufsetzens denken, aber eine solche ist sicher nicht erfolgt, da die Stellung jedesmal mit Hülfe eines angeklebten, mit dem Beobachtungsfernrohr ablesbaren Spiegels controlirt wurde und sich innerhalb weniger Scalentheile constant erhielt.

Möglichensfalls liegt der Grund in kleinen seitlichen oder verticalen Verschiebungen des Magnets gegen den Multiplikator, die nicht unmöglich erscheinen mit Rücksicht darauf, dass der Magnet von der Decke herabhing, der Multiplikator auf dem Tische ruhte, der seinerseits auf dem Fussboden stand.

Ein ähnliches Schwanken der Galvanometerconstante hat auch Hr. Wild bemerkt.<sup>1)</sup>

1) H. Wild, Abhandl. der Petersb. Akad. 32. 1884. Separatabdruck p. 106.

30. Schwingungsdauer. — In Zwischenräumen von 15 Minuten wurden dreimal je 6 Durchgangszeiten durch die Ruhelage mit dem Chronographen aufgezeichnet und die hieraus berechnete<sup>1)</sup> Schwingungsdauer mit der Reduction auf unendlich kleine Amplituden und der Correction wegen des Ganges der Uhr versehen.

Ein Hilfsbeobachter las alle 5 (später 3) Minuten das Intensitätsvariometer ab.

Als Temperatur  $t$  des Magnets während der Schwingungsdauer ist bis zum 25. Oct. einschliesslich die Angabe des Thermometers in der Rolle angesetzt. Von da an wurde nach Beendigung der Schwingungsbeobachtungen in den Hohlmagnet ein in Fünftelgrade getheiltes Thermometer eingeschoben und seine Temperatur nach 2 Minuten abgelesen. Diese Ablesung wurde mit dem Mittel der zu Anfang und Ende der Schwingungen in der Rolle herrschenden Temperatur zu einem Hauptmittel vereinigt. Der Unterschied in den Angaben beider Thermometer war durchschnittlich noch nicht  $0,1^\circ$  und erreichte nur einmal  $0,25^\circ$ .

Durch Addition von:

$$\frac{T_0}{2} \left[ \frac{H - H_n}{H_0} - (u + x)(t - t_n) \right]$$

[ $u$  und  $x$  s. p. 430]

kann die Schwingungsdauer auf eine Normaltemperatur und einen Normalstand des Variometers reducirt werden. Die so erhaltenen Werthe sind unter  $T_n$  aufgeführt, die Normalwerthe sind die nämlichen wie p. 431.

#### Schwingungsdauer.

Dat.	$T_0$ beob.		$T_0$ Mittel	Variom. $v''$ $r''$		Temp. $t''$	$T_n$
31. Mai	12,0187	12,0200	12,0194	+ 3,82	17,84	17,34	12,0247
21. Juni	12,0170	12,0187	12,0179	+12,72	19,92	20,07	12,0216
28. "	12,0238	12,0261	12,0250	+18,98	22,10	22,04	12,0247
5. Juli	12,0194 <sup>2)</sup>	12,0201	12,0196	+12,35	19,81	19,97	12,0234
12. "	12,0306	12,0288	12,0297	+21,39	23,30	23,09	12,0260
19. "	12,0237	12,0226	12,0232	+20,34	22,29	22,13	12,0238
							12,0240 $\pm 11$

1) Das Schema s. z. B. F. Kohlrausch, Leitfaden etc. 6. Aufl. p. 169.

2) Drei Beobachtungen, von denen zwei übereinstimmend 12,0194 gaben.

Dat.	$T_0$ beob.		$T_0$ Mittel	Variom. v'' r''		Temp. t''	$T_n$
25. Oct.	11,9812	11,9795	11,9804	-25,79	12,24	12,49	11,9727 <sup>1)</sup>
27. "	11,9735	11,9766	11,9751	-19,72	11,83	11,97	11,9779 <sup>1)</sup>
30. "	11,9714	11,9705	11,9710	-25,14	11,63	11,69	11,9679
1. Nov.	11,9801	11,9784	11,9793	-33,16	11,00	11,14	11,9693
3. "	11,9677	11,9679	11,9678	-27,35	10,06	10,27	11,9705
6. "	11,9690	11,9692	11,9691	-31,55	9,87	10,09	11,9674
8. "	11,9756	11,9762	11,9759	-32,62	10,40	10,35	11,9703
							11,9691 $\pm$ 11
13. "	18,7617	18,7634	18,7626	-31,71	9,89	9,63	18,7609
17. "	18,7565	18,7577	18,7571	-37,64	7,86	7,96	18,7604
							18,7607 $\pm$ 2
28. Dec.	11,9972	11,9971	11,9971	-29,69	8,26	7,33	12,0091
29. "	11,9938	11,9956	11,9947	-26,35	8,51	7,91	12,0090
30. "	11,9898	11,9909	11,9904	-23,47	8,52	7,98	12,0083
2. Jan.	—	—	11,9947 <sup>2)</sup>	-27,87	8,15	7,02	12,0101
15. "	12,0017	12,0018	12,0018	-28,51	9,55	8,87	12,0076
16. "	11,9951	11,9954	11,9953	-24,24	9,75	8,90	12,0058
18. "	11,9955	11,9958	11,9957	-21,78	9,77	9,06	12,0090
19. "	11,9974	12,0001	11,9991	-26,14	9,62	8,93	12,0076
							12,0083 $\pm$ 10

Im Winter ist die Temperatur am Variometer erheblich höher als unter dem Galvanometerkasten. Dies rührt von dem Zusammenwirken mehrerer Umstände her: des Schutzes, welchen der Galvanometerkasten gegen die Temperaturerhöhung durch mehrere Personen und die Beleuchtung gewährt, der grösseren Höhe der Console für das Variometer über dem Boden und endlich des durch die Schirme nicht ganz abgehaltenen Einflusses der Beleuchtungslampe.

31. Ermittlung von  $M/H$  aus der Ablenkung des Magnetometers der Tangentenbussole. — Das Schema für einen Satz der Ablenkungsbeobachtungen war:

Magnet	o	o	o		w	w	w
Nordpol	o	w	o		o	w	o

öfter wurde das erste Tripel wiederholt.

Es wurde aus der grösseren Entfernung zweimal, aus der kleineren einmal beobachtet; für die inzwischen vorge-

1) Aus bereits früher angegebenen Gründen nicht zum Mittel verwert.

2) Mittel aus 11,9939, 11,9938, 11,9963.

genommenen Ablesungen des Variometers wurde der Magnet auf die westliche Console vertical gestellt.

Der Gang einer vollständigen Beobachtung war also:

- 1) Var., 2) Abl. grössere Entf., 3) Var., 4) Abl. kl. Entf., 5) Var., 6) Abl. grössere Entf., 7) Var.

Da das Umlegen des Magnets (ohne Berührung desselben mit einem gebogenen Messingdraht ausgeführt) nur wenige Secunden in Anspruch nahm, und die Beruhigungszeit des Magnetometers I etwa 20 Secunden betrug, war die Aufeinanderfolge der Beobachtungen eine rasche und auf eine Reduction mit Hülfe der Ablesungen am Declinationsvariometer konnte ausser am 19. Januar verzichtet werden. Bemerkenswerth ist übrigens der geringe Einfluss dieser Reduction auf die definitiven Werthe der Ablenkungen selbst bei unruhiger Declination.

Die Temperatur des ablenkenden Magnets gab ein in den Hohlraum eingeschobenes Thermometer.

Da die Magnetabstände (p. 420), die Torsionsverhältnisse (p. 70) und der Betrag der vom Polabstand abhängigen Terme (p. 404) angegeben ist, so können gleich die nach Formel (15) berechneten Resultate zusammengestellt werden.

$M/H_T$  aus Ablenkungen am Magnetometer der Tangentenbusssole.

Dat.	$n$	$\psi^0$	$M'''/H_T'''$ $= 10^{-7} \times$	Mittel $10^7 \times$	Variom. $v''' \quad i'''$		Temp. des Magn. $t'''$
31. Mai	217,38	2,0523	3,4247	3,4246	+ 7,28	17,83	17,67
	476,91	4,5025	3,4245	$\pm 1$			
21. Juni	217,02	2,0484	3,4191	3,4189	+ 11,95	19,00	19,69
	476,08	4,4936	3,4187	$\pm 2$			
28. "	216,99	2,0481	3,4189	3,4194	+ 18,78	22,09	22,12
	476,20	4,4946	3,4199	$\pm 5$			
5. Juli	216,93	2,0476	3,4180	3,4176	+ 13,89	19,71	20,27
	475,81	4,4911	3,4172	$\pm 4$			
12. "	216,93	2,0476	3,4186	3,4187	+ 23,61	23,20	22,95
	475,95	4,4926	3,4188	$\pm 1$			
19. "	217,04	2,0488	3,4207	3,4204	+ 18,01	22,39	22,44
	476,07	4,4940	3,4201	$\pm 3$			

Dat.	<i>n</i>	$\psi^0$	$M'''/H_T'''$ $= 10^{-7} \times$	Mittel $10^7 \times$	Variom. $v''' \quad \tau'''$		Temp. des Magn. $t'''$
25. Oct.	218,03	2,0580	3,4460	3,4461	-25,85	12,30	12,46
	477,86	4,5107	3,4463	$\pm 1$			
27. "	217,18	2,0500	3,4325	3,4328	-16,31	11,58	12,55
	476,08	4,4937	3,4332	$\pm 3$			
30. "	217,66	2,0545	3,4401	3,4401	-27,50	11,67	12,10
	477,03	4,5026	3,4401	$\pm 0$			
1. Nov.	218,14	2,0589	3,4473	3,4479	-38,63	11,11	11,41
	478,25	4,5138	3,4485	$\pm 6$			
3. "	217,54	2,0533	3,4377	3,4375	-28,00	10,08	10,76
	476,71	4,4995	3,4373	$\pm 2$			
6. "	217,52	2,0531	3,4373	3,4377	-28,66	10,06	10,78
	476,84	4,5008	3,4381	$\pm 4$			
8. "	217,76	2,0553	3,4411	3,4410	-30,83	10,56	10,65
	477,22	4,5043	3,4409	$\pm 1$			
13. "	217,71	2,0550	3,4407	3,4408	-31,86	9,93	10,09
	477,14	4,5038	3,4408	$\pm 0$			
17. "	217,76	2,0555	3,4414	3,4413	-36,62	7,97	8,40
	477,22	4,5046	3,4412	$\pm 1$			
28. Dec.	217,95	2,0557	3,4407	3,4412	-30,32	8,25	7,84
	477,83	4,5068	3,4417	$\pm 5$			
29. "	217,77	2,0537	3,4372	3,4375	-25,91	8,55	8,31
	477,39	4,5021	3,4379	$\pm 4$			
30. "	217,74	2,0534	3,4369	3,4369	-24,27	8,46	8,23
	477,22	4,5005	3,4368	$\pm 0$			
2. Jan.	217,88	2,0549	3,4390	3,4395	-29,19	8,20	7,68
	477,68	4,5051	3,4399	$\pm 4$			
15. "	217,99	2,0562	3,4412	3,4413	-27,93	9,55	9,19
	477,81	4,5069	3,4413	$\pm 0$			
16. " 1)	217,50	2,0534	3,4374	—	-24,10	9,75	9,12
	217,46 <sup>2)</sup>	2,0530	3,4367	—	-24,10	9,75	9,32
18. "	217,42	2,0525	3,4358	3,4361	-22,03	9,77	9,52
	476,63	4,4996	3,4363	$\pm 2$			
19. "	217,87	2,0568	3,4427	3,4432	-30,80	9,60	9,35
	477,68	4,5096	3,4436	$\pm 4$			

Durch Addition von  $(M/H) [\mu(\tau - \tau_n) + (H - H_n)/H_0]$  können diese Werthe auf den Normalstand des Variometers und eine Normaltemperatur reducirt werden. Für dieselben Normalwerthe wie früher (p. 431) gibt dies:

(Folgt Tabelle p. 439).

Die etwas grössere mittlere Differenz im Sommer mag daher rühren, dass der Magnetabstand (welcher im Sommer nicht jedesmal controlirt wurde) von meteorologischen Einflüssen etwas abhängig war.

1) Von 16. Jan. an Magnetometer II.

2) Am 16. Jan. konnte nur in der grösseren Entfernung beobachtet werden.

Sommer		Herbst		Winter	
Datum	$(M/H_T)_n$	Datum	$(M/H_T)_n$	Datum	$(M/H_T)_n$
31. Mai	$3,4251 \cdot 10^7$	25. Oct.	$3,4465 \cdot 10^7$ <sup>1)</sup>	28. Dec.	$3,4427 \cdot 10^7$
21. Juni	$3,4222$ "	27. "	$3,4420$ "	29. "	$3,4421$ "
28. "	$3,4233$ "	30. "	$3,4403 \cdot 10^7$	30. "	$3,4429$ "
5. Juli	$3,4214$ "	1. Nov.	$3,4404$ "	2. Jan.	$3,4418$ "
12. "	$3,4246$ "	3. "	$3,4396$ "	15. "	$3,4430$ "
19. "	$3,4234$ "	6. "	$3,4393$ "	16. "	$3,4415$ "
	$3,4233 \cdot 10^7$	8. "	$3,4398$ "	18. "	$3,4421$ "
	$\pm 10$	13. "	$3,4397$ "	19. "	$3,4429$ "
		17. "	$3,4393$ "		$3,4424 \cdot 10^7$
			$3,4398 \cdot 10^7$		$\pm 5$
			$\pm 3$		

1) Nicht zum Mittel verwendet.

32. Bestimmung von  $M/H$  am Platze des Galvanometers. — Die Anordnung der Beobachtungen war hier:

Entfernung	grösser		kleiner		grösser	
Magnet	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>
Nordpol	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>w</i>

und zwar wurden jedesmal fünf Umkehrpunkte des schwingenden Magnets notirt. Die Elimination der Declinationsänderungen war unumgänglich; das Intensitätsvariometer wurde für beide Lagen des Magnets abgelesen und das Mittel verworther.

Von vornherein wird man diesen Beobachtungen weniger Vertrauen schenken, da durch den Polabstand des langen Halbmagnets eine neue Fehlerquelle eintritt, welche einen noch grösseren Einfluss auf das Resultat besitzt, als ein Irrthum über den Polabstand des Hauptmagnets.

Ich verzichte daher auf eine ausführliche Mittheilung der Ablesungen und gebe nur die auf Normalwerthe<sup>1)</sup> der Temperatur und Horizontalintensität reducirten Resultate für  $M/H_g$ . Durch Multiplication derselben mit  $H_g/H_T$  müsste man  $(M/H_T)_n$  erhalten, wie dies oben aus den Beobachtungen an der Tangentenbussole abgeleitet ist.

1) Diese vgl. p. 431.

( $M/H_g$ )<sub>n</sub> aus Beobachtungen am Platze des  
Galvanometers.

Hülfsmagnet: 3.				Hülfsmagnet: 2.			
Datum	( $M/H_g$ ) <sub>n</sub> = $10^7 \times$	( $M/H_T$ ) <sub>n</sub> ber. = $10^7 \times$	beob.- <sup>1)</sup> ber. = $10^7 \times$	Datum	( $M/H_g$ ) <sub>n</sub> = $10^7 \times$	( $M/H_T$ ) <sub>n</sub> ber. = $10^7 \times$	beob.- ber. = $10^7 \times$
31. Mai	3,4165	3,4218	+ 0,0033	13. Nov.	3,4032	3,4378	+ 0,0019
21. Juni	3,4152	3,4205	+ 17	17. "	3,4021	3,4370	+ 23
28. "	3,4154	3,4208	+ 25		3,4027		+ 0,0021
5. Juli	3,4148	3,4201	+ 13		± 5		
12. "	3,4160	3,4214	+ 32				
19. "	3,4152	3,4206	+ 28	28. Dec.	3,4104	3,4420	+ 0,0007
	3,4155	3,4209	+ 0,0024	29. "	3,4089	3,4405	+ 16
	± 5			30. "	3,4088	3,4404	+ 25
25. Oct.	3,4077	3,4452	+ 0,0013	2. Jan.	3,4104	3,4422	— 4
27. "	3,4083	3,4408	+ 12	15. "	3,4085	3,4412	+ 18
30. "	3,4046	3,4401	+ 0,0002	18. " <sup>2)</sup>	3,4082	3,4414	+ 7
1. Nov.	3,4034	3,4390	+ 14	19. "	3,4089	3,4418	+ 11
3. "	3,4037	3,4393	+ 3		3,4092		+ 0,0010
6. "	3,4034	3,4384	+ 9		± 7		
8. "	3,4038	3,4388	+ 10				
	3,4038		+ 0,0008				
	± 3						

1) ( $M/H_T$ )<sub>n</sub> beob. vgl. p. 439. 2) Am 16. Jan. war der Draht gerissen.

Eine nähere Betrachtung derjenigen Beobachtungen, bei denen Magnet 2 als Hülfsmagnet diente, zeigte aber eine systematische Abweichung der aus der grösseren und der kleineren Entfernung erhaltenen Werthe, woraus auf einen kleinen Fehler in der Bestimmung des Polabstandes zu schliessen war.

Ich führte daher eine Eliminationsrechnung aus nach der Formel:

$$M/H_g = \frac{(r^2 \operatorname{tg} \psi - r'^2 \operatorname{tg} \psi')(1 + \theta')}{2(r^2 - r'^2 + \varrho)},$$

$$\left[ \varrho = p_2 - p_2' + \frac{p_4}{r^2} - \frac{p_4'}{r'^2} \right],$$

welche leicht aus (15) erhalten wird, und in der schon eine angenäherte Kenntniss der Polabstände genügt, um die kleine Correctionsgrösse  $\varrho$  (hier - 224) hinreichend genau zu bestimmen.

Es ergab sich so (für die Normalwerthe):



Datum	$(M/H_g)_n$ = $10^7 \times$	$(M/H_T)_n$ ber. = $10^7 \times$	beob.-ber. = $10^7 \times$
13. Nov.	3,4058	3,4405	-0,0008
17. "	3,4033	3,4382	+0,0011
28. Dec.	3,4087	3,4403	+0,0024
29. "	3,4105	3,4422	-0,0001
30. "	3,4108	3,4425	+0,0004
2. Jan.	3,4124	3,4442	-0,0024
15. "	(3,4052)	(3,4382)	—
18. "	3,4116	3,4448	-0,0027
19. "	3,4102	3,4431	-0,0002
			-0,0003

Die reducirten Werthe weichen untereinander nun natürlich stärker ab, die mittlere Differenz gegen die Resultate an der Tangentenbussole ist aber gering.

Auch mit Hülfsmagnet 3 ist im Herbst die Differenz nur 0,038, d. h. der Unterschied etwa  $\frac{1}{4000}$ .

Woher die relativ grosse Differenz im Sommer ( $\frac{1}{1400}$ ) rührt, habe ich nicht aufzuklären vermocht. Vielleicht hat sich zu einem kleinen Fehler im Polabstande von Magnet 3 ein anderer an sich unbedeutender, in gleichem Sinne wirkender Fehler gesellt.

Zur Berechnung des Endresultates sind diese Beobachtungen nicht verwerthet, hingegen gestatten dieselben in Verbindung mit der Schwingungsdauer, die Horizontalintensität und das Moment des Magnets 4 zu bestimmen. Benutzt man die reducirten Werthe von  $M/H_g$  und  $T_0$ , so erhält man  $H_g$  für den jeweiligen Normalstand des Variometers und  $M$  für die Normaltemperatur.

Sei  $\mathfrak{A} = H[M + (\gamma - \alpha) H] = \frac{\pi^2 K}{T_0^2 (1 + \Theta)}$ ,  $\mathfrak{B} = M/H$ ,  
so wird:

$$H = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B} + (\gamma - \alpha)}}, \quad M = \mathfrak{B} \cdot H.$$

Hierin ist für den unbelasteten Magnet  $K_{10^9} = 1,8388 \cdot 10^9$ , für den belasteten  $4,5141 \cdot 10^9$ ;  $\Theta$  s. p. 65 ff.,  $T_n$  p. 435 ff.,  $\gamma - \alpha$  ist  $0,00478 \cdot 10^7$  (vgl. p. 66).

Indem ich vom 13. November an die nach dem Eliminationsverfahren berechneten  $M/H$  zu Grunde lege, finde ich:

## Horizontalintensität und Momente von Magnet 4.

Variometer: $v_n = +10,0, \quad r_n = 20^\circ$			Variometer: $v_n = -30,0, \quad r_n = 10^\circ$			Variometer: $v_n = -30,0, \quad r_n = 10^\circ$		
Dat.	$(H_g)_n$	$M(20^\circ)$ $= 10^7 \times$	Dat.	$(H_g)_n$	$M(10^\circ)$ $= 10^7 \times$	Dat.	$(H_g)_n$	$M(10^\circ)$ $= 10^7 \times$
31. Mai	1,9098	6,5249	25. Oct.	1,9205	6,5446	28. Dec.	1,9185	6,5394
21. Juni	1,9107	6,5253	27. "	1,9207	6,5464	29. "	1,9180	6,5412
28. "	1,9101	6,5238	30. "	1,9222	6,5443	30. "	1,9180	6,5419
5. Juli	1,9105	6,5239	1. Nov.	1,9223	6,5424	2. Jan.	1,9173	6,5425
12. "	1,9097	6,5237	3. "	1,9220	6,5420	15. "	(1,9197)	(6,5370)
19. "	1,9103	6,5241	6. "	1,9226	6,5434	18. "	1,9177	6,5423
	1,9102	6,5243	8. "	1,9220	6,5422	19. "	1,9183	6,5417
	$\pm 3$	$\pm 5$		1,9222	6,5436		1,9180	6,5415
		Hieraus $M(10^\circ)$ $10^7 \times$ 6,5426		$\pm 2$	$\pm 20$		$\pm 3$	$\pm 8$
			13. Nov	1,9210	6,5424			
			17. "	1,9217	6,5401			
				1,9214	6,5413			
				$\pm 3$	$\pm 11$			

Die am 25. und 27. October erhaltenen  $H_g$  lassen sich nicht mit den folgenden vergleichen, wohl aber die  $M$ .

Im October hatte  $M$  einen höheren Werth als im Sommer, was vielleicht daher rührt, dass der Magnet einige Monate mit dem Nordpol nach unten in einem Schranke gestanden hatte. Durch den Gebrauch sinkt  $M$  auf den alten Werth; überhaupt ist die ausserordentliche Constanz von  $M$  bemerkenswerth.

Da das Variometer zwischen den einzelnen Reihen neu justirt wurde, resp. seinen Platz wechselte, so besteht zwischen dem  $(H_g)_n$  der verschiedenen Columnen keine Beziehung.

33. Schlussrechnung. Nachdem die Ergebnisse der einzelnen Operationen mitgetheilt sind, erübrigt nur noch, aus denselben nach Formel (25) das Endresultat herzuleiten.

Um die Controle der Rechnung zu erleichtern, will ich vorher noch den Correctionsfactor  $F_1$  wegen der Temperatur und  $F_2$  wegen Aenderung der Horizontalcomponente (vgl. Formel 20) angeben. Es ist  $\mu = 0,03281$ ,  $\alpha/2 = 0,014$  (für den belasteten Magnet  $0,016$ )  $f = 0,032151$  (Sommer) resp.  $0,032166$ ,  $\mu_1 = 0,0364$ .

## Correctionsfactoren.

Dat.	$F_1$	$F_2$	Dat.	$F_1$	$F_2$	Dat.	$F_1$	$F_2$
31. Mai	0,99993	0,99938	25. Oct.	0,99997	1,00014	28. Dec.	0,99975	1,00020
21. Juni	1,00008	0,99972	27. "	0,99972	0,99895	29. "	0,99981	0,99995
28. "	0,99999	1,00000	30. "	0,99976	1,00049	30. "	0,99991	1,00032
5. Juli	0,99993	0,99938	1. Nov.	0,99986	1,00135	2. Jan.	0,99967	1,00031
12. "	1,00010	0,99961	3. "	0,99980	1,00019	15. "	0,99981	0,99932
19. "	0,99993	1,00036	6. "	0,99974	0,99939	16. "	0,99983	0,99983
			8. "	0,99986	0,99940	18. "	0,99977	0,99979
			13. "	0,99977	1,00009	19. "	0,99981	1,00094
			17. "	0,99978	1,00009			

Der Werth von  $\pi$ , also die Länge der Quecksilbersäule von  $0^\circ$  und 1 qmm Querschnitt, welche 1 Ohm darstellt, wird:

Dat.	$\pi$	Dat.	$\pi$	Dat.	$\pi$
31. Mai	1,06240	25. October	1,06245	28. December	1,06173
21. Juni	1,06250 <sup>1)</sup>	27. "	1,06304	29. "	1,06233
28. "	1,06288 <sup>1)</sup>	30. "	1,06230	30. "	1,06180
5. Juli	1,06227 <sup>1)</sup>	1. November	1,06192	2. Januar	1,06185
12. "	1,06209	3. "	1,06191	15. "	1,06309
19. "	1,06244	6. "	1,06248	16. "	1,06333
	1,06243	8. "	1,06242	18. "	1,06301
	$\pm 18$	13. "	1,06262	19. "	1,06241
		17. "	1,06266		1,06244
			1,06242		$\pm 52$
			$\pm 25$		

Hauptmittel 1,06243.

Es sei daran erinnert, dass am 6. Nov. und 18. Jan. die Beobachtung von  $(p_0/H_T)$  misslungen war.

Im Sommer sind die vier mittleren Beobachtungen als weniger sicher zu betrachten, da der Magnetabstand nicht controlirt war u. s. f. Für die besten Beobachtungen möchte ich die vom Herbst halten; im Winter machten sich die etwas ungünstigeren Temperaturverhältnisse fühlbar.

Dass die Mittel so genau übereinstimmen, ist wohl nur ein Zufall; hervorzuheben ist aber, dass trotz der grossen Verschiedenheit der äusseren Umstände je nach der Jahreszeit merkliche Differenzen nicht vorhanden sind.

1) Hier ist ein unbedeutender Irrthum (um 0,0<sub>5</sub>26) verbessert, der bei der ersten Mittheilung sich eingeschlichen hatte.

34. Schliesslich will ich noch einige Punkte erörtern, welche für die Beurtheilung der Zuverlässigkeit der Messungen wesentlich sind.

Die im Sommer noch leidlich günstigen magnetischen Verhältnisse des Beobachtungsraumes waren durch den beim Beginne der Arbeit nicht vorauszusehenden Umbau erheblich verschlechtert.

Durch die nach jeder Hauptbeobachtung vorgenommene Bestimmung des Verhältnisses der Horizontalintensität für den Platz von Galvanometer und Tangentenbussole ist aber den Folgen dieses Uebelstandes wirksam vorgebeugt.

Zunächst beträgt die Aenderung von  $H_T/H_g$  während der ganzen Zeit nicht mehr als 0,0017 und erreicht innerhalb jeder Periode der Beobachtungen (vom 25. Oct. abgesehen) nur wenige Zehntausendtheile.

Gefordert ist für den Herbst und Winter nur merkliche Gleichheit der magnetischen Aenderungen an den Orten des Variometers, des Galvanometers und der Tangentenbussole für die wenigen Stunden einer Beobachtung. Das Ergebniss der Reduction von  $\Omega$ ,  $p_0 H_T$ ,  $T_0 M/H_T$  auf Normalwerthe ergibt für die verschiedenen Tage nur eine mittlere Abweichung von  $1/7000$  bis  $1/10000$ , woraus hervorgeht, dass die oben erwähnte Forderung selbst für längere Zeiträume nahezu erfüllt ist — wie viel mehr also für wenige Stunden.

Dieselbe Ueberlegung entkräftet auch etwaige Bedenken gegen die Aufstellung des Variometers.

Die Temperaturverhältnisse im Beobachtungsraume waren recht günstige.

Ueber den Gang der Temperatur der Zimmerluft gibt das Thermometer des Variometers Aufschluss, welches keinerlei Umhüllung hatte. Während der Operationen 4) bis 7) (vgl. p. 414) betrug die mittlere Schwankung im Sommer  $0,1^\circ$ , im Herbst  $0,3^\circ$ , im Winter  $0,4^\circ$  mit den Extremen  $0,33^\circ$ ,  $0,42^\circ$ ,  $0,71^\circ$ .

Was ferner die einzelnen Fälle angeht, in denen die Temperatur zur Anbringung von Reductionen gebraucht wird, so wird die Temperatur des Hohlmagnets 4 durch das eingeschobene Thermometer mit genügender Sicherheit ge-

geben;  $WQ$  war durch seine Umhüllung gegen schnelle Temperaturschwankungen geschützt, und die nur wenig Draht enthaltenden Rollen können keine merkliche Temperaturdifferenz gegen das im Hohlraum befindliche Thermometer besessen haben.

Die in Betracht kommenden Rollen von  $WK_1$  waren allerdings von nicht geringer Masse, dafür war dieser Kasten aber ausser der Umgebung mit Watte und Pappkasten mit einer wollenen Decke zugedeckt, wodurch die tägliche Amplitude der Temperatur sehr herabgesetzt und das Eindringen einer Temperaturschwankung verzögert wurde.

Um übrigens die Zimmertemperatur in der Nacht nicht zu stark sinken zu lassen, wurde im Herbst und Winter nach Bedarf 1 oder 2 Bunsenbrenner auf den Fussboden gesetzt.

Ich habe auch den Verlauf der Temperatur innerhalb  $WK_1$  häufig vom Vormittage an verfolgt. Im Sommer fand von  $10^{3/4}$  bis  $2^{1/2}$  Uhr ein Ansteigen um etwa  $0,2^\circ$  (höchstens  $0,4^\circ$ ) statt, von da an betrugen die Aenderungen stets nur wenige Hunderttheile, im Herbst hielten sich die Schwankungen überhaupt in diesen Grenzen<sup>1)</sup>, im Winter erreichten sie in den 7 Stunden vor Beginn der Messungen nur einmal  $0,3^\circ$ .

Aus dem Mitgetheilten geht hervor, dass die Temperaturreductionen an den Widerständen von  $WK_1$  mit hinreichender Sicherheit angebracht werden können.

Bei dem Galvanometer handelt es sich nur darum, ob das Thermometer in der Drahtrolle unter dem Kasten während der Dämpfungs- und Widerstandsmessung hinreichend den Temperaturänderungen des Galvanometers selbst folgt. Die p. 425 ff. mitgetheilten Beobachtungen sprechen hierfür; zudem würde eine Fortlassung der ganzen Temperaturreduction am Galvanometerwiderstande das Endresultat, wie schon erwähnt, nur um etwa  $\frac{1}{10000}$  verändern.

Uebrigens waren die Schwankungen der Temperatur auch nur unerheblich (etwa um die Hälfte) grösser als oben für  $WK_1$  angegeben.

Hervorgehoben sei noch, dass im Herbst und Winter

1) Nur am 25. Oct. von 9<sup>h</sup> a. m. bis 3<sup>h</sup> p. m.  $0,24^\circ$ .

jede Hauptbeobachtung mit Galvanometerwiderstand<sup>1)</sup> und Dämpfung begann, worauf die Ermittlung der Galvanometerconstante folgte. Der Temperatursteigerung wurde also möglichst wenig Einfluss eingeräumt.

Zur Vermeidung von Rechenfehlern ist ein grosser Theil der Rechnung doppelt geführt. Insbesondere sind die meisten log. Decr. von Studirenden zweimal unabhängig gerechnet, und die Schlussrechnung sowohl nach der Formel (25), wie auch mit Benutzung der auf Normalwiderstände reducirten Werthe den einzelnen Grössen ausgeführt. Gegen gröbere Irrthümer bietet die überall vorgenommene Vergleichung der auf Normaltemperaturen und Normalvariometerstände reducirten Werthe eine Gewähr.

Das Endresultat der vorstehenden Untersuchung sei noch einmal angegeben:

$$1 \text{ Ohm} = 1,0624, \text{ m/qmm Hg von } 0^\circ.$$

Ich habe noch mit Dank der Unterstützung zu gedenken, welche mir bei meiner Arbeit von verschiedenen Seiten zu Theil wurde. Die erforderlichen Mittel stellte die Königliche Akademie der Wissenschaften zu Berlin und die Grossherzoglich Hessische Regierung zur Verfügung; als Hülfbeobachter waren thätig die Herren Dr. W. Fischer, Reallehrer H. Kasslick, stud. Agthe, Heinzerling, Jordan, Sivert Rasmussen und Hr. Mechaniker L. Waibler, der auch einen grossen Theil der benutzten Apparate angefertigt hat. Zu ganz besonderem Danke bin ich aber Hrn. Professor F. Kohlrausch verpflichtet, der die Vergleichung meiner Widerstände mit seinen Quecksilbernormalröhren gestattete.

Halle a. S., 30. Oct. 1888.

---

1) Hierbei brannten höchstens 2 Kerzen, und es waren nur 2 Personen im Zimmer.

VIII. Ueber den Einfluss der Stärke  
der Magnetisirung auf die Aenderung des electri-  
schen Widerstandes des Eisens;  
von G. H. von Wyss.

(Hierzu Taf. VI Fig. 13–16.)

Die Frage, in wie weit die Aenderung des electrischen Leitungsvermögens, welche beim Längsmagnetisiren eines Eisendrahtes eintritt, von der magnetisirenden Kraft abhängig sei, ist schon von verschiedenen Beobachtern untersucht worden. Adams<sup>1)</sup> hat zuerst gefunden, dass für kleine und mittlere Stromstärken der Quotient  $dw/i^2$  constant sei, wenn  $i$  die magnetisirende Stromstärke,  $dw$  die Aenderung des Widerstandes bezeichnen. Für sehr grosse Werthe von  $i$  dagegen nimmt der Quotient ziemlich rasch ab. Dem gegenüber folgert Auerbach<sup>2)</sup> aus seinen Versuchen, dass die Aenderung der magnetisirenden Kraft proportional sei. Am eingehendsten hat sich Chwolson<sup>3)</sup> mit dieser Frage befasst, indem er die magnetisirende Stromstärke innerhalb eines ziemlich weiten Spielraumes schrittweise ansteigen liess, durch Vermehrung der Elemente. Die Abhängigkeit der Widerstandsänderung von der Stromstärke stellte er durch eine Curve dar. Dieselbe steigt, anfänglich langsam, dann ziemlich rasch an, um sich schliesslich der horizontalen Richtung zu nähern. Auf ein ganz ähnliches Abhängigkeitsverhältniss scheint mir die bei Anwendung von sehr starken magnetisirenden Strömen auftretende rasche Abnahme des Quotienten  $dw/i^2$  hinzudeuten, die von Adams beobachtet wurde. Der letztere mass die Stromstärke mittelst einer Tangentenbussole, während sich Chwolson und Auerbach damit begnügen, aus der Anzahl von Elementen oder der Vermehrung der Drahtwindungen, durch welche der Strom floss, auf die Zunahme der magnetisirenden Kraft zu schliessen. Und doch ist nicht sowohl diese Grösse, als vielmehr das im Eisen entwickelte magnetische Moment für die Widerstandsänderung massgebend. Dafür scheint mir namentlich der Umstand zu

1) Adams, Phil. Mag. (5) 1. p. 153. 1876.

2) Auerbach, Wied. Ann. 5. p. 298 u. 301. 1878.

3) Chwolson, Carl's Rep. 13. p. 230. 1877.

sprechen, dass der Verlauf der von Chwolson construirten Curve demjenigen der Magnetisirungsfunktion ganz ähnlich ist.

Ich habe daher meinerseits im letzten Sommer den Einfluss untersucht, welchen die Längsmagnetisirung auf den Widerstand des Eisens ausübt, dabei aber auch die Grösse des entwickelten Momentes gemessen, um womöglich eine directe Beziehung zwischen den beiden Grössen zu finden.

Die Methode, welche ich benutzte, um den Widerstand der zu untersuchenden Drähte zu messen, war diejenige der Wheatstone'schen Brücke. Die Drähte sind im Zweige  $A C_2$  (Fig. 13) eingeschaltet, — ihr Widerstand sei mit  $w_3$  bezeichnet, — während sich im Zweige  $C_2 B$  ein unveränderlicher Vergleichswiderstand  $w_4$  befindet. Die Widerstände  $w_1$  und  $w_2$  der beiden übrigen Zweige werden durch einen Neusilberdraht gebildet, der eine Länge von 1 m und einen Durchmesser von 1 mm hat, und der längs einer in Millimeter getheilten Scala geradlinig ausgespannt ist. Ueber diesem Messdrahte lässt sich ein Schlitten verschieben, welcher das eine Ende der Brücke darstellt. Ein am Schlitten angebrachter Nonius ermöglicht es, den Schlitten bis auf  $\frac{1}{10}$  mm genau auf einen Theilstrich der Scala einzustellen. In der Brücke befindet sich ein Wiedemann'sches Spiegelgalvanometer  $G$ . Die zur Widerstandsmessung erforderliche Stromstärke lieferte bei allen Versuchen ein Daniellelement  $E'$ .

Verbindet nun die Brücke die beiden Punkte  $D_2$  und  $C_2$ , in denen die Widerstände  $w_1$  und  $w_2$  einerseits,  $w_3$  und  $w_4$  andererseits zusammentreffen, und wird der Schlitten so gestellt, dass die Brücke stromlos ist, so gilt bekanntlich die Gleichung:

$$w_3 : w_4 = l_1 : l_2,$$

wenn  $l_1$  und  $l_2$  die Längen sind, in welche der Messdraht durch die Schneide des Schlittens getheilt wird. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass der Messdraht ganz homogen sei.  $w_3$  und  $w_4$  bedeuten aber in diesem Falle den ganzen, zwischen  $A$  und  $C_2$ , resp.  $C_2$  und  $B$  befindlichen Widerstand, also denjenigen des Eisens, resp. den Vergleichswiderstand, plus demjenigen der Zuleitungsdrähte und der Endklemmen des Messdrahtes. Man kann sich von diesem letzteren, einer ganz unbekannten Grösse, befreien, wenn man noch zwei Hülfs wider-



stände  $\omega_1$  und  $\omega_2$  einschaltet und nun drei Einstellungen macht, wobei die Brücke das eine Mal von  $C_1$  nach  $D_1$ , das zweite von  $C_2$  nach  $D_2$ , und das dritte Mal von  $C_3$  nach  $D_3$  gelegt wird. Bezeichnet man jetzt mit  $l_1$  die Differenz  $D_2 - D_1$  der beiden ersten Einstellungen, mit  $l_2$  die der beiden letzten, so ist wiederum:

$$l_1 : l_2 = w_3 : w_1.$$

$w_3$  und  $w_4$  bedeuten in diesem Falle nur den Widerstand des Eisens und der Zuleitungsdrähte. Der letztere lässt sich aber leicht ermitteln und von  $w_3$ , resp.  $w_4$  subtrahiren. Es war ungefähr  $w_3 = w_4$  und  $\omega_1 = \omega_2$ , wodurch die mittlere Schneidenstellung  $D_2$  in die Mitte des Messdrahtes zu liegen kam. Die Grösse von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  habe ich so gewählt, dass die beiden äusseren Einstellungen in die Nähe der Theilstriche 128 und 871 fallen. Da ich immer dieselben Theile des Messdrahtes benutzte, und da ich namentlich nicht den absoluten Werth des Widerstandes  $w_3$  zu kennen brauchte, glaubte ich davon absehen zu können, den Messdraht zu kalibriren. Die Verbindungen in den Punkten  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  waren durch Quecksilbernäpfe hergestellt.

Es handelte sich also darum, zu untersuchen, ob und in welcher Weise die Einstellungen der Schneide  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  verändert wurden, wenn die Eisendrähte magnetisirt waren. Dazu schlug ich folgenden Weg ein.

Das eine Ende der Brücke wurde zunächst nach  $C_1$  gelegt, und das andere, die Schneide, in der Nähe des Punktes  $D_1$  auf einen Theilstrich eingestellt. Dann wurde der so lange offene Stromkreis, den die ganze Brückencombination darstellt, geschlossen, und zwar in der Weise, dass zuerst das Element und erst hernach die Brücke geschlossen wird. Damit verhütete ich, dass die von Villari<sup>1)</sup> und von Herwig<sup>2)</sup> beobachteten beim plötzlichen Schliessen auftretenden Extrastrome ihren Weg durch die Galvanometerwindungen nahmen und so meine Messungen beeinträchtigten; denn wenn die Brücke erst nach geschehenem Stromschlusse ihrerseits geschlossen

1) Villari, Nuov. Cim. (2) 11. p. 201. 1874.

2) Herwig, Pogg. Ann. 153. p. 115. 1874.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.

wird, so kann, wie Auerbach<sup>1)</sup> bemerkt, ein Extrastrom nicht eintreten.

Nachdem der erste Ausschlag des Galvanometers abgelesen worden war, schloss ich jetzt den magnetisirenden Strom — er sei mit  $I$  bezeichnet — und beobachtete, ohne dass die Stellung der Schneide verändert wurde, abermals den ersten Ausschlag des Galvanometers, worauf der Strom  $I$  wieder unterbrochen wurde. Der Eisendraht war also schon magnetisch, wenn die Brücke geschlossen wurde, so dass ich auch in diesem Falle vor Inductionsströmen im Galvanometer sicher sein konnte. Es wurde jetzt die Schneide um 2 oder 3 mm verschoben, bis der Ausschlag der Nadel nach der anderen Seite hin erfolgte, und für diese Stellung wiederum zwei Ablesungen gemacht, die eine bei offenem, die andere bei geschlossenem Strome  $I$ . Ich wiederholte nun die vier Ablesungen in derselben Reihenfolge, bis ich schliesslich sowohl für den unmagnetischen, wie für den magnetischen Zustand je fünf positive und fünf negative Ausschläge hatte. Aus den fünf zusammengehörigen Werthen wurde dann das Mittel genommen und aus dem positiven und dem negativen Mittelwerthe durch eine einfache Interpolation die wahren Einstellungen  $(D_1)_u$  und  $(D_1)_m$  berechnet. Die Indices  $u$  und  $m$  beziehen sich auf den unmagnetischen, resp. magnetischen Zustand des Eisens. Das Galvanometer war so empfindlich, dass einer Verschiebung der Schneide um 1 mm ein Ausschlag von ca. 36 Scalentheilen bei den beiden äusseren, von ca. 26 Scalentheilen bei der mittleren Einstellung entsprach. Da die Ausschläge also verhältnissmässig klein sind, und die Schneide nie mehr als 2 mm von der wahren Nullstellung entfernt war, ist es erlaubt, den Ausschlag der Entfernung von der Nullstellung proportional zu setzen, und die letztere so zu interpoliren. Die Ausschläge des Galvanometers können leicht bis auf Zehntel Scalentheile abgelesen, die Mittelwerthe daher bis auf Hundertstel berechnet werden. Infolge dessen ist es möglich, die Schneidenstellung bis auf Hundertstel Millimeter mit Sicherheit, und wenigstens mit grosser Wahrscheinlichkeit noch bis auf eine weitere Stelle zu berechnen.

1) Auerbach, Wied. Ann 5. p. 324. 1878.

War in der oben angedeuteten Weise die obere Einstellung  $D_1$  gefunden, so wurde die Brücke verschoben, die beiden anderen Einstellungen  $D_2$  und  $D_3$  gesucht und aus den daraus berechneten Längen  $l_1$  und  $l_2$  die Quotienten  $(l_1/l_2)_n = (w_3/w_1)_n$  und  $(l_1/l_2)_m$  bestimmt. Hierauf wurden dieselben Messungen in umgekehrter Reihenfolge gemacht. Für eine und dieselbe magnetisirende Stromstärke  $I$  bestimmte ich die Quotienten  $l_1/l_2$  gewöhnlich viermal.

Die Eisendrähte  $w_3$  wurden magnetisirt mit Hülfe einer Spirale  $S_1$  aus Kupferdraht (Durchmesser = 1 mm). Die Spirale hatte eine Länge von 50 cm und einen inneren Durchmesser von 4 cm und bestand aus vier Lagen von je 300 Windungen. Die Stromstärke  $I$  lieferte eine Batterie  $E$  von gewöhnlichen Daniell'schen Elementen, deren Zahl bei den verschiedenen Versuchsreihen geändert wurde und bis auf 24 ansteigen konnte. Um noch grössere Stromstärken anwenden zu können, wurde die Batterie bei einzelnen Beobachtungsreihen noch durch Accumulatoren verstärkt. Zur Messung von  $I$  diente eine gewöhnliche Tangentenbussole.

Ein Punkt, der nothwendiger Weise berücksichtigt werden musste, ist die Wärmeentwicklung im Innern der Spirale  $S_1$ , wenn diese vom Strome  $I$  durchflossen ist. Die Dimensionen der Spirale sowohl, wie der Ort der Beobachtungen erlaubten keine continuirliche Wasserspülung im Innern des Hohlraumes von  $S_1$ . Ich suchte daher den Einfluss der Temperatur auf andere Art zu eliminiren und wählte ein Verfahren, das dem Principe nach schon von Chwolson<sup>1)</sup> befolgt wurde. Als Vergleichswiderstand  $w_4$  benutzte ich ebenfalls Eisendrähte, die in Form, Zahl, Grösse und Material denjenigen von  $w_3$  genau gleich waren, und die in das Innere einer zweiten Kupferdrahtspirale  $S_2$  geschoben wurden. Diese letztere hatte ähnliche Dimensionen wie  $S_1$  und wurde ebenfalls vom Strome  $I$  durchflossen. Nur schaltete ich die vier Windungslagen von  $S_2$  so, dass der Strom in den beiden unteren Lagen links, in den beiden oberen dagegen rechtsläufig war, oder umgekehrt, sodass die magnetisirende Kraft der ersteren derjenigen der letzteren entgegengesetzt gerichtet war, und dass die Eisendrähte  $w_4$

1) Chwolson l. c. p. 231.

somit als nicht magnetisirt betrachtet werden konnten. Dass freilich die Compensation keine vollkommene war, wird sich im Verlauf der Untersuchung zeigen. Da die beiden Spiralen  $S_1$  und  $S_2$  gleich gebaut sind, müssen auch die Wärmemengen, die der Strom  $I$  in ihnen erzeugt, einander gleich sein, die beiden Widerstände  $w_3$  und  $w_4$  also in gleichem Maasse erwärmt und vergrössert werden, und wenn eine Veränderung des Widerstandes  $w_3$  gegenüber  $w_4$  eintritt, so darf ich sie nun auf Rechnung der Magnetisirung setzen. Ueberdies trug ich Sorge, dass der magnetisirende Strom  $I$  nie länger geschlossen blieb, als absolut nöthig war zur Ablesung des Galvanometerausschlages, sowie zur Beobachtung an der Tangentenbussole, um damit die Wärmeentwicklung auf ein Minimum zu beschränken. Die Temperaturerhöhung, welche von dem zur Messung des Widerstandes dienenden Strome herrührt, kann ganz vernachlässigt werden.

Die beiden Spiralen  $S_1$  und  $S_2$  waren, um eine Einwirkung auf das Galvanometer zu verhüten, etwa 5 bis 6 m von demselben entfernt. Es musste daher dafür gesorgt werden, dass die Drähte, welche die Zuleitung zu den eigentlichen Eisenwiderständen  $w_3$  und  $w_4$  bilden, im Verhältniss zu diesen letzteren keinen allzu grossen Werth besitzen. Ich suchte dies dadurch zu erreichen, dass ich die Zuleitungen doppelt legte, sodass ihr Widerstand auf die Hälfte sank. Er betrug etwa  $\frac{1}{4}$  S.-E., während  $w_3$ , resp.  $w_4$  bei den ersten Versuchen 1 S.-E., bei den späteren dagegen 51 S.-E. war.

In erster Linie schien es mir wünschenswerth, zu untersuchen, ob die Richtung der Magnetisirung auf den Widerstand einen Einfluss habe, mit anderen Worten, ob der Widerstand ein anderer sei, je nach dem die positive Electricität zuerst den Nordpol oder zuerst den Südpol der magnetisirten Molecüle trifft. Zu diesem Zwecke legte ich 16 gerade gezogene, je 31 cm lange Eisendrähte und 16 ebenso lange Kupferdrähte parallel so neben einander, dass immer ein Kupferdraht zwischen zwei Eisendrähften lag. Der Durchmesser der Drähte war 1 mm. Die Kupferdrähte waren mit Seide umspinnen, die Eisendrähte blank, weswegen ich die letzteren durch enge Kautschukröhrchen zog, aus deren Enden sie nur in einer Länge von 5 mm hervorragten. Jeder

Draht wurde dann an den Enden mit seinen beiden Nachbarn zusammengelöthet, sodass das Ganze, einer Thermosäule ähnlich, eine zusammenhängende Kette bildete. Die blanken Löthstellen wurden sorgfältig mit Schellack überzogen und nun das ganze Leitersystem um eine Glasröhre gewickelt (Durchmesser = 1,73 cm). Jeder einzelne Draht lag unmittelbar auf der Röhre, ihrer Axe parallel. Die Glasröhre schob ich so weit in die Spirale  $S_1$  hinein, bis die Mitte dieser letzteren mit derjenigen des Drahtsystems  $w_3$  — ich nenne es die Eisenspirale  $w_3$  — zusammenfiel. Da die Spirale  $S_1$  eine Länge von 50 cm hat, die Eisendrähte dagegen eine solche von 31 cm besitzen, kann ich annehmen, dass die magnetisirende Kraft in allen ihren Punkten gleich gross ist. Der Vergleichswiderstand  $w_1$  bestand aus einer gleich gebauten Eisen- und Kupferspirale und befand sich in der Spirale  $S_2$ . Bei diesen Versuchen aber schaltete ich die Lagen der Spirale  $S_2$  so, dass die magnetisirende Kraft der beiden oberen Schichten diejenige der beiden unteren verstärkte, und dass die in den Axen von  $S_1$  und  $S_2$  auftretenden Kräfte einander gleich aber entgegengesetzt gerichtet waren. Die positive Electricität, die von  $A$  aus in die Zweige des Brückensystems eintritt, trifft somit in  $w_3$  zuerst den Nordpol, in  $w_1$  zuerst den Südpol der Molecularmagnete oder umgekehrt. Wenn also die Richtung der Molecularmagnete in Bezug auf den durchgehenden Strom massgebend ist, in der Weise, dass der Widerstand in dem einem Falle mehr zunimmt, als im anderen, oder gar im einen Falle abnimmt, im anderen dagegen wächst, so muss das hauptsächlich in einer Veränderlichkeit der mittleren Schneidestellung zu Tage treten.

Eine Reihe von Versuchen haben ergeben, dass die Richtung der Molecüle in Bezug auf den durchgehenden Strom von keinem Einfluss ist. In Tab. 1 sind die Resultate von zwei Versuchsreihen zusammengestellt. Bei der ersten waren die Widerstände  $w_3$  und  $w_4$  so magnetisirt, dass die Nordpole, bei der zweiten dagegen so, dass die Südpole der Molecularmagnete in sämmtlichen Eisendrähten nach dem Knotenpunkte  $C_2$  gerichtet waren. Die Richtung der Nordpole ist durch einen Pfeil angedeutet. In der ersten Columnne sind die Punkte der Scala angegeben, auf welche die Schneide eingestellt war, in den mit  $s$  bezeichneten Columnnen die entsprechen-

den Ausschläge. Die folgenden enthalten die berechneten Nullstellungen  $D$ , die daraus abgeleiteten Längen  $l_1$  und  $l_2$  und deren Quotienten. Da die Ausschläge  $s$ , wie ich schon bemerkte, Mittelwerthe aus je fünf Ablesungen sind, wobei die Eisendrähte immer abwechselnd unmagnetisch und magnetisch waren, so beziehen sich die beiden in derselben Zeile stehenden Ausschläge  $s$  auf denselben Zeitpunkt und lassen sich also miteinander vergleichen. Die magnetisirende Stromstärke war = 1 Amp. und erzeugte in den Drähten ein Gesamtmoment = 4430 (C.G.S.) oder im Volumen 1 ccm ein Moment  $\sigma = 1140$ . Die Unterschiede der Quotienten  $(l_1/l_2)_u$  und  $(l_1/l_2)_m$  betragen im Mittel  $1/30000$ . Wir können also die Quotienten als gleich ansehen.

Tabelle 1.

Unmagnetisch.					Magnetisirt $\xrightarrow{W_2} C_2 \xleftarrow{W_1}$				
	$s$	$D$	$l$	$l_1/l_2$	$s$	$D$	$l$	$l_1/l_2$	
130	-50,88	131,46 <sub>4</sub>	361,85 <sub>2</sub>	0,9827 <sub>2</sub>	-49,82	131,43 <sub>4</sub>	361,89 <sub>0</sub>	0,9827 <sub>4</sub>	
492	-45,74	493,31 <sub>6</sub>	368,21 <sub>4</sub>		-46,02	493,32 <sub>4</sub>	368,24 <sub>7</sub>		
860	-53,18	861,53 <sub>0</sub>	368,53 <sub>7</sub>	0,9822 <sub>1</sub>	-54,60	861,57 <sub>1</sub>	362,02 <sub>4</sub>	0,9822 <sub>5</sub>	
863	48,78	861,59 <sub>6</sub>	361,98 <sub>1</sub>		47,46	861,63 <sub>5</sub>	362,02 <sub>4</sub>		
495	67,46	493,03 <sub>9</sub>			67,16	493,06 <sub>8</sub>			
133	66,80	131,07 <sub>8</sub>			67,98	131,04 <sub>4</sub>			

  

Unmagnetisch.					Magnetisirt $\xleftarrow{W_2} C_2 \xrightarrow{W_1}$				
	$s$	$D$	$l$	$l_1/l_2$	$s$	$D$	$l$	$l_1/l_2$	
130	-40,42	131,16 <sub>3</sub>	362,06 <sub>8</sub>	0,9822 <sub>0</sub>	-39,36	131,13 <sub>2</sub>	362,11 <sub>5</sub>	0,9822 <sub>3</sub>	
492	-42,78	493,23 <sub>1</sub>	368,63 <sub>2</sub>		-43,35	493,24 <sub>7</sub>	368,66 <sub>7</sub>		
860	-64,76	861,86 <sub>3</sub>	368,99 <sub>7</sub>	0,9811 <sub>9</sub>	-66,52	861,91 <sub>4</sub>	362,08 <sub>9</sub>	0,9812 <sub>2</sub>	
863	36,42	861,93 <sub>2</sub>	362,05 <sub>7</sub>		34,84	861,99 <sub>8</sub>	362,08 <sub>9</sub>		
495	71,07	492,95 <sub>5</sub>			70,92	492,96 <sub>0</sub>			
133	73,06	130,89 <sub>8</sub>			74,02	130,87 <sub>1</sub>			

Während die mittlere Einstellung  $D_2$  (493) unverändert bleibt, zeigen die beiden äusseren deutlich eine Aenderung, und zwar rücken beide nach den Enden des Messdrahtes hin. Daraus geht hervor, dass die Widerstände  $w_3$  und  $w_1$  bei der Magnetisirung zunehmen, aber in gleichem Maasse, da der Quotient constant bleibt. Auf seine Veränderlichkeit im Laufe einer Versuchsreihe komme ich noch im Folgenden zurück. Wir können also mit Sicherheit annehmen, dass, wenn der Widerstand des Eisens bei der Längsmagnetisirung

wächst, die Richtung der magnetisirenden Kraft in Bezug auf den durchgehenden Strom von keinem Einfluss auf diese Zunahme ist.

Nachdem dieses erste Resultat gewonnen war, ging ich daran, an einer ganz aus Eisendraht gebildeten Spirale die Abhängigkeit der Widerstandsänderung von der Stromstärke zu untersuchen. Ich wand auf ein dünnes Holzbrettchen umsponnenen Eisendraht (Durchmesser = 0,25 mm) so auf, dass ich eine einschichtige, rechteckige Spirale erhielt. Die Länge des Rechteckes war 27,1 cm, die Breite 0,6 cm. Ich kann somit die in den kurzen Seiten der rechteckigen Windungen auftretende Quermagnetisirung vernachlässigen gegenüber der Längsmagnetisirung der langen Seiten. In der Schicht befanden sich 40 Windungen. Eine gleiche Spirale bildete wiederum den Vergleichswiderstand  $w_4$ . Bei diesen Versuchen waren aber die vier Windungslagen von  $S_2$  so geschaltet, dass die resultirende magnetisirende Kraft in der Axe = 0 war.

Mit diesen Eisenspiralen habe ich eine Reihe von Versuchen gemacht, wobei die Stromstärke von Versuch zu Versuch variierte. In Tab. 2 ist eine Versuchsreihe (vom 15. Aug. a.) ausführlicher wiedergegeben. Die Zahlen werden nach dem, was mit Bezug auf Tab. 1 gesagt wurde, ohne weiteres verständlich sein. Neu ist nur die letzte, mit  $\Delta w$  bezeichnete Columnne. Sie enthält die Aenderung des Quotienten  $l_1/l_2$ , und zwar in Einheiten der vierten Decimale, oder da  $w_3$  angenähert gleich  $w_4$  ist, die Aenderung des Widerstandes  $w_3$  in Zehntausendsteln.

Vergleicht man die zweite Tabelle mit der ersten, so bemerkt man, dass jetzt die mittlere Einstellung  $D_2$  eine ganz entschiedene Aenderung zeigt, wenn die Drähte magnetisirt sind, eine Aenderung, die sich nur dadurch erklären lässt, dass  $w_3$  bei der Magnetisirung zunimmt. Die beiden äusseren Einstellungen rücken abermals nach den Enden des Messdrahtes hin, was ebenfalls auf eine Vergrößerung des Gesamtwiderstandes  $w_3 + w_4 + \omega$  gegenüber dem zweiten Hülfswiderstande  $\omega$  hindeutet.



Tabelle 2.

	Unmagnetisch.				Magnetisch.				$\Delta w$
	$s$	$D$	$l$	$l_1/l_2$	$s$	$D$	$l$	$l_1/l_2$	
130	29,52	129,09 <sub>1</sub>	369,63 <sub>1</sub>	0,9911 <sub>8</sub>	30,46	129,06 <sub>3</sub>	396,69 <sub>2</sub>	0,9913 <sub>9</sub>	2,1
500	30,22	498,72 <sub>2</sub>	372,91 <sub>6</sub>		29,36	498,75 <sub>5</sub>	372,90 <sub>3</sub>		
873	43,56	871,64 <sub>1</sub>			42,96	871,65 <sub>8</sub>			
873	39,38	871,81 <sub>1</sub>	373,12 <sub>6</sub>	0,9915 <sub>6</sub>	38,66	871,83 <sub>3</sub>	373,11 <sub>2</sub>	0,9917 <sub>6</sub>	2,0
500	31,76	498,68 <sub>5</sub>	369,97 <sub>7</sub>		30,88	498,72 <sub>1</sub>	370,03 <sub>6</sub>		
130	43,76	128,70 <sub>8</sub>			44,72	128,68 <sub>5</sub>			
130	46,88	128,60 <sub>5</sub>	369,98 <sub>4</sub>	0,9905 <sub>6</sub>	47,70	128,58 <sub>3</sub>	370,05 <sub>6</sub>	0,9908 <sub>2</sub>	2,6
500	34,28	498,59 <sub>2</sub>	373,49 <sub>6</sub>		33,32	498,63 <sub>3</sub>	373,47 <sub>8</sub>		
873	30,40	872,09 <sub>1</sub>			29,64	872,11 <sub>1</sub>			
873	27,80	872,16 <sub>5</sub>	373,58 <sub>6</sub>	0,9908 <sub>7</sub>	27,34	872,17 <sub>9</sub>	373,55 <sub>7</sub>	0,9910 <sub>9</sub>	2,2
500	35,04	498,58 <sub>6</sub>	370,17 <sub>6</sub>		34,04	498,62 <sub>2</sub>	370,22 <sub>9</sub>		
129	19,60	128,41 <sub>6</sub>			20,32	128,39 <sub>3</sub>			

$$i = 0,83 \text{ Amp.}, \quad M = 1088 \text{ (G.-C.-S.)}, \quad \sigma = 1023.$$

Neben dem Einfluss der Magnetisirung aber tritt uns in Tab. 2 auch derjenige der Temperatur entgegen. Während die Eisendrähte  $w_3$  und  $w_4$  durch den Strom  $I$  erwärmt werden, stehen die Hülfs widerstände  $\omega$  nicht unter dem Einfluss dieser Wärmeentwicklung, sondern bleiben constant. Infolge dessen müssen sich die beiden Einstellungen  $D_1$  und  $D_3$  stetig nach aussen verschieben, was sich auch deutlich aus der Tab. 2 herauslesen lässt. Wenn sich auch bei der mittleren Einstellung  $D_2$  eine kleine continuirliche Aenderung bemerkbar macht, so ist dieselbe im allgemeinen so gerichtet, dass wir auf eine etwas raschere Temperatursteigerung bei  $w_4$  als bei  $w_3$  schliessen können. Die Spirale  $S_2$  zählt etwas mehr Windungen als  $S_1$ , besitzt also einen etwas grösseren Widerstand, weswegen denn auch die Temperatur in ihrem Hohlraume schneller wächst als bei  $S_1$ . Die Veränderlichkeit der Quotienten  $(l_1/l_2)_u$  und  $(l_1/l_2)_m$  innerhalb der Versuchsreihe lässt sich aus der Verschiebung der beiden äusseren Einstellungen erklären. Während wir zu den Einstellungen  $D_2$  und  $D_3$  fortschreiten, verschiebt sich natürlich  $D_1$ , und wenn wir nun doch mit  $D_2$  und  $D_3$  den vorher bestimmten Werth von  $D_1$  kombiniren, so muss der Quotient  $l_1/l_2$  etwas zu klein ausfallen. Macht man dagegen die Einstellungen in der Reihenfolge  $D_3 D_2 D_1$ , so werden die Quotienten im allgemeinen etwas zu gross sein. Das Mittel der beiden ersten



ist 0,9913<sub>7</sub>, das der beiden letzten 0,9907<sub>1</sub>. Die Abnahme entspricht der Verschiebung von  $D_2$  und der schon erwähnten kleinen Ungleichheit der beiden Spiralen  $S_1$  und  $S_2$ . Im übrigen ist diese Veränderlichkeit von  $l_1/l_2$  nicht von Belang, indem nur die Differenzen zwischen den beiden in derselben Zeile stehenden und für denselben Zeitmoment geltenden Werthe für uns von Interesse sind.

Um ein Urtheil zu haben über die Grösse der Temperatursteigerung im Innern der Spirale  $S_1$ , verfolgte ich mittelst eines aus Eisen und Kupferdraht gebildeten Thermoelementes den Verlauf der Temperatur an der Oberfläche der Eisenspirale  $w_3$ . Die eine Löthstelle des Thermoelementes,  $P_1$ , (Temperatur  $t_1$ ) war mit etwas Schellack unmittelbar auf der Drahtschicht befestigt, die andere,  $P_2$ , (Temperatur  $t_2$ ) in ein mit Wasser gefülltes Glas eingetaucht. Die Temperatur des Wassers wurde mittelst eines feinen, in Hundertstel Grade eingetheilten Quecksilberthermometers bestimmt. Im Stromkreis des Thermoelementes war noch ein Wiedemann'sches Galvanometer eingeschaltet, das ich so weit astasirt hatte, dass es für eine Temperaturdifferenz  $t_2 - t_1 = 1^\circ$  einen Ausschlag von 30 Scalentheilen gab. Der Ausschlag wurde stets vor Beginn einer Beobachtungsreihe abgelesen und dann jeweilen, nachdem ich eine Gruppe von drei Einstellungen  $D$  vollendet hatte.

Bei der in Tab. 2 angeführten Versuchsreihe betrug nun die anfängliche Temperatur des Wassers  $t_2' = 19,08^\circ$ . Das Galvanometer zeigte einen Ausschlag  $u'$  von 12,71 Scalentheilen, was eine Temperaturdifferenz ergibt  $t_1' - t_2' = 0,41^\circ$ . Es war also  $t_1' = 19,49^\circ$ . Am Ende der Reihe waren die entsprechenden Grössen (mit '' bezeichnet):

$$t_2'' = 19,38^\circ; u'' = 50,70; t_1'' - t_2'' = 1,66^\circ; t_1'' = 21,04^\circ.$$

Die Temperatur der Eisendrähte hatte sich also während der Beobachtungsreihe, die etwa zwei Stunden dauerte, um  $1,55^\circ$  erhöht.

Sehen wir zu, wie gross der Einfluss dieser Temperatursteigerung auf den Widerstand ist. Es war mir leider nicht mehr möglich, den Temperaturcoefficienten für die von mir benutzte Eisensorte zu bestimmen. Benoist<sup>1)</sup> hat gefunden, es sei für Eisen zu setzen:

1) Wiedemann, Lehre von der Electricität. 1. p. 525. 1882.

$$w_t = w_0 (1 + 0,004\,516\,t + 0,000\,005\,828\,t^2),$$

wenn  $w_0$  den Widerstand bei  $0^\circ$  bezeichnet. Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Wärmeentwicklung sei in beiden Magnetisirungsspiralen genau gleich gross, sodass die Eisenspiralen in jedem Zeitmomente gleiche Temperaturen besitzen. Es sei  $w = w_3 + w_4$ ,  $W = w + \omega$ . Dann ist, da die beiden Hülfs Widerstände ihre Temperaturen nicht geändert haben:

$$W' = w_0 (1 + 0,004\,516\,t') + \omega$$

$$W'' = w_0 (1 + 0,004\,516\,t'') + \omega.$$

Es war  $\omega = 0,17402\,w'$ . Setzen wir für  $t'$  und  $t''$  ihre Werthe ein,  $t' = 19,49$ ;  $t'' = 21,04$ , und bilden wir den Ausdruck  $(W'' - W')/W'$ , so erhalten wir:

$$\frac{W'' - W'}{W'} = 0,0054.$$

Also hat sich der Widerstand  $W$  während der Beobachtungsreihe um 0,0054 seines Werthes vergrössert. Dieser Zunahme von  $W$  muss aber offenbar eine ebenso grosse Abnahme des Quotienten  $AD_1/D_1B$  entsprechen, da:

$$AD_1 : D_1B = \omega : W.$$

Aus Tab. 2 entnehmen wir, dass der Punkt  $D_1$  ursprünglich beim Scalentheile 129,09<sub>1</sub> lag. Daraus folgt,  $(AD_1/D_1B)' = 129,09_1/870,90_9 = 0,14823$ . Am Schlusse der Reihe hatte sich  $D_1$  verschoben nach 128,41<sub>8</sub>. Es war jetzt  $(AD_1/D_1B)'' = 128,41_8/871,58_4 = 0,14734$ . Der Quotient hat sich also um  $0,0389/0,14823 = 0,0060$  seines Werthes verkleinert. Dieser Werth ist allerdings um  $1/10$  von dem oberen verschieden. Wenn man aber berücksichtigt, dass der Temperaturcoefficient von Eisen zu Eisen variiren kann, wird man die Uebereinstimmung der beiden Werthe für genügend erachten müssen, zum Beweise, dass die stetigen Verschiebungen der beiden äusseren Einstellungen in der That ihren Grund in der Erwärmung der Eisendrähte haben.

In Tab. 3 sind die Resultate der verschiedenen Versuchsreihen mitgetheilt, welche, abgesehen von dreien, sämmtlich in derselben Weise ausgeführt wurden. Bei jenen drei Reihen, welche der Zeit nach die ersten waren, sind die Quotienten  $l_1/l_2$  nur zwei-, statt viermal bestimmt worden. Die

erste Columne enthält das Datum der Beobachtung, die zweite die Werthe des Quotienten, welche dem unmagnetischen, die dritte diejenigen, welche dem magnetischen Zustand des Eisens entsprechen, die vierte ihre Differenzen, also die Zunahme des Widerstandes in Einheiten der vierten Decimale, und die fünfte endlich die Stromstärke  $I$ , ausgedrückt in Ampère. Die Zahlen der sechsten Columne werden im Folgenden noch ihre Erklärung finden.

Tabelle 3.

	$(l_1/l_2)_u$	$(l_1/l_2)_m$	$\Delta w$	$I$	$\Delta M$
13. Aug. a	0,9915 <sub>3</sub> 9915 <sub>7</sub> 9911 <sub>5</sub> 9915 <sub>3</sub>	0,9916 <sub>5</sub> 9916 <sub>7</sub> 9912 <sub>7</sub> 9916 <sub>3</sub>	1,3 1,0 1,2 1,2 1,2	0,52	104
2. " a	0,9916 <sub>1</sub> 9922 <sub>8</sub>	0,9918 <sub>6</sub> 9924 <sub>3</sub>	1,9 1,5 1,7	0,67	132
13. " p	0,9908 <sub>3</sub> 9912 <sub>0</sub> 9906 <sub>6</sub> 9907 <sub>9</sub>	0,9910 <sub>8</sub> 9913 <sub>3</sub> 9908 <sub>5</sub> 9909 <sub>7</sub>	1,7 1,6 1,9 1,8 1,8	0,70	139
8. " a	0,9908 <sub>1</sub> 9914 <sub>7</sub> 9909 <sub>8</sub> 9912 <sub>0</sub>	0,9910 <sub>1</sub> 9916 <sub>3</sub> 9912 <sub>0</sub> 9914 <sub>7</sub>	2,0 1,6 2,2 1,8 1,9	0,71	141
4. " p	0,9912 <sub>7</sub> 9914 <sub>1</sub>	0,9914 <sub>7</sub> 9915 <sub>0</sub>	2,0 1,8 1,9	0,75	148
14. " p	0,9912 <sub>2</sub> 9913 <sub>2</sub> 9908 <sub>5</sub> 9909 <sub>4</sub>	0,9914 <sub>0</sub> 9915 <sub>2</sub> 9910 <sub>4</sub> 9911 <sub>2</sub>	1,8 2,0 1,9 1,8 1,9	0,83	162
15. " a	0,9911 <sub>8</sub> 9913 <sub>6</sub> 9905 <sub>5</sub> 9908 <sub>7</sub>	0,9913 <sub>9</sub> 9917 <sub>6</sub> 9908 <sub>2</sub> 9910 <sub>9</sub>	2,1 2,0 2,6 2,2 2,2	0,83	162
3. " p	0,9926 <sub>8</sub> 9930 <sub>2</sub>	0,9929 <sub>4</sub> 0,9932 <sub>7</sub>	3,0 2,5 2,8	0,90	173

	$(l_1/l_2)_u$	$(l_1/l_2)_m$	$\Delta w$	$I$	$\Delta M$
11. Aug. <i>p</i>	0,9906 <sub>3</sub>	0,9909 <sub>7</sub>	2,8	0,92	176
	9909 <sub>4</sub>	9912 <sub>5</sub>	3,0		
	9900 <sub>0</sub>	9904 <sub>0</sub>	3,1		
	9905 <sub>8</sub>	9908 <sub>4</sub>	2,6		
			2,9		
14. " <i>a</i>	0,9916 <sub>2</sub>	0,9920 <sub>0</sub>	3,8	1,09	199
	9911 <sub>0</sub>	9914 <sub>4</sub>	3,4		
	9906 <sub>0</sub>	9910 <sub>2</sub>	3,6		
	9904 <sub>5</sub>	9907 <sub>9</sub>	3,4		
			3,6		
11. " <i>a</i>	0,9901 <sub>0</sub>	0,9905 <sub>0</sub>	4,0	1,19	209
	9906 <sub>1</sub>	9909 <sub>0</sub>	3,5		
	9899 <sub>3</sub>	9903 <sub>3</sub>	4,0		
	9902 <sub>8</sub>	9906 <sub>5</sub>	3,5		
			3,8		
7. " <i>a</i>	0,9899 <sub>5</sub>	0,9903 <sub>0</sub>	3,5	1,25	214
	9911 <sub>1</sub>	9915 <sub>0</sub>	3,9		
	9900 <sub>0</sub>	9904 <sub>5</sub>	3,6		
	9901 <sub>0</sub>	9905 <sub>0</sub>	3,7		
			3,7		
6. " <i>a</i>	0,9896 <sub>1</sub>	0,9900 <sub>1</sub>	4,0	1,49	229
	9907 <sub>3</sub>	9911 <sub>1</sub>	3,8		
	9889 <sub>4</sub>	9893 <sub>0</sub>	4,2		
	9896 <sub>3</sub>	9899 <sub>9</sub>	3,6		
			3,9		
9. " <i>a</i>	0,9888 <sub>0</sub>	0,9892 <sub>5</sub>	4,5	1,54	230
	9895 <sub>5</sub>	9899 <sub>3</sub>	3,8		
	9887 <sub>0</sub>	9891 <sub>8</sub>	4,2		
	9888 <sub>0</sub>	9893 <sub>5</sub>	4,6		
			4,3		

Aus den mitgetheilten Zahlen geht erstens deutlich hervor, dass der Widerstand bei der Magnetisirung in allen Fällen gewachsen ist. Es geht aber auch hervor, dass diese Zunahme mit wachsender Stromstärke ebenfalls grösser wird. Trägt man in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme die Stromstärken  $I$  als Abscissen auf, die Widerstandsänderungen  $\Delta w$  als Ordinaten, so erhält man die in Fig. 14 gezeichnete Curve. Wenn auch die einzelnen Punkte zum Theil ziemlich weit von derselben abweichen, was sich aus der Unsicherheit erklären lässt, welche der zweiten Ziffer von  $\Delta w$  anhaftet, so ist doch der Charakter der Curve unverkennbar. Ihr Verlauf ist ganz analog wie derjenige der Chwolson'schen Curve. Leider sind die Werthe von  $\Delta w$  zu klein, als dass es erlaubt wäre,

die zur mathematischen Definition der Curve nöthigen Zahlen-coëfficienten zu berechnen.

Um den directen Zusammenhang zwischen der Widerstandsänderung und dem magnetischen Momente zu erhalten, habe ich noch die Magnetisirungsfunktion bestimmt für die benutzten Eisendrähte. Dabei ist aber ein wesentlicher Punkt zu beachten, will man keinen Fehlschluss machen.

Die Eisenspirale  $w_3$  befindet sich fortwährend in der Spirale  $S_1$ . Fließt durch die letztere der Strom  $I$ , so ruft er in der Eisenmasse ein temporäres Moment  $M_T'$  hervor. Wird der Strom unterbrochen, so sinkt das Moment nicht auf den Werth 0 zurück, sondern es bleibt ein remanentes Moment  $M_R'$  bestehen. Eine Aenderung im Widerstande entspricht also nicht einem Ansteigen des Momentes von 0 auf  $M_T'$ , sondern nur der Differenz  $\Delta M' = M_T' - M_R'$ . Dabei haben wir aber stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass das Moment des Vergleichswiderstandes  $w_4$  während der ganzen Versuchsreihe = 0 ist. Nun zeigt sich aus meinen Versuchen, betr. die Magnetisirungsfunktion, dass die magnetisirenden Kräfte, welche von den beiden unteren und von den beiden oberen Schichten der Spirale  $S_2$  herrühren, sich nicht vollkommen aufheben. War also der Strom  $I$  geschlossen, so besaß auch  $w_4$  ein temporäres Moment  $M_T''$ , welches nach erfolgter Stromunterbrechung auf den Werth  $M_R''$  zurücksank. Es sei  $\Delta M'' = M_T'' - M_R''$ . Eine Aenderung des Widerstandes  $\Delta w$  entspricht dann in Wirklichkeit einer Aenderung des Momentes von der Grösse  $\Delta M = \Delta M' - \Delta M''$ .

Das Moment der Eisendrähte bestimmte ich nach der gewöhnlichen Methode, mit Hülfe eines kleinen Magnetometers. Dasselbe war auf einem horizontalen Balken aufgestellt, dessen Axe in der Senkrechten zum magnetischen Meridiane lag. Die beiden Spiralen  $S_1$  und  $S_2$  befanden sich zu beiden Seiten des Magnetometers in solchen Entfernungen, dass ein sie durchfließender Strom keine Wirkung auf dasselbe ausübt. Bezeichnet  $M$  das im Eisen entwickelte Moment,  $d$  die Entfernung der Mitte der Spirale  $S_1$  (also auch der Eisendrähte) von derjenigen des Magnetes,  $\lambda$  die halbe Poldistanz der Eisendrähte,  $H$  die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, und

endlich  $u$  den Ausschlagswinkel, so ist bekanntlich, sofern  $d$  einigermassen gross ist gegen  $\lambda$ :

$$M = \frac{H}{2} d^3 \left(1 - \frac{\lambda^2}{d^2}\right) \operatorname{tg} u.$$

Für  $\lambda$  setzte ich  $\frac{5}{6} l^1$ , wenn  $l$  die halbe Länge der Eisen-drähte bezeichnet. Für die Horizontalcomponente nahm ich den Werth 0,201 an, der kurz vor meinen Versuchen für denselben Beobachtungsort gefunden worden war. Ich glaubte davon absehen zu können,  $H$  selbst noch zu bestimmen, da es mir nicht so sehr daran gelegen war, den absoluten Werth des Momentes, als vielmehr die Magnetisirungsfuction zu kennen.

Tabelle 4.

$I$	$M'_T$	$M'_R$	$\Delta M'$	$M''_T$	$M''_R$	$\Delta M''$	$\Delta M$
0,478	889	711	178	166	86	80	98
0,623	1033	805	228	360	251	107	121
0,746	1120	846	274	502	377	125	149
0,856	1179	875	304	616	473	143	161
0,980	1241	895	346	733	571	162	184
1,067	1265	899	366	811	635	176	190
1,199	1312	904	408	921	728	193	215
1,356	1341	911	430	1036	825	211	219
1,557	1378	915	463	1167	935	232	231

In Tab. 4 sind die für  $M'_T, M'_R$ , etc. gefundenen Werthe angegeben. Die Curven  $aa', bb', cc'$  in Fig. 15 stellen den Verlauf der Functionen  $M'_T, M'_R$  und  $\Delta M$  dar. Die in Tab. 3, in der letzten, mit  $\Delta M$  bezeichneten Columnne stehenden Grössen sind nun nichts anderes als diejenigen Ordinaten der Curve  $cc'$ , welche den in der fünften Columnne von Tab. 3 angegebenen Werthen der Stromstärke  $I$  entsprechen. Trägt man dieselben als Abscissen auf, die correspondirenden Werthe von  $\Delta w$  als Ordinaten, so erhält man die in Fig. 16 gezeichnete Curve, welche somit den directen Zusammenhang zwischen der Widerstandsänderung und der massgebenden Aenderung des Momentes erkennen lässt, und welche denn auch einen anderen Verlauf zeigt, als die in Fig. 14 wiedergegebene Curve. Während diese letztere mit wachsender Stromstärke sich offenbar der horizontalen Richtung nähert, ähnlich wie die Magnetisirungsfuction, so lässt sich aus der ersteren ein gleiches Verhalten nicht ersehen.

1) F. Kohlrausch, Leitfaden d. prakt. Phys. p. 178. 1887.

*Es ist vielmehr die Aenderung des Widerstandes nahezu proportional derjenigen des Momentes, wenigstens innerhalb des Bereiches, über den sich meine Untersuchung erstreckt.*

In Betreff der absoluten Grösse der von mir gemessenen Widerstandsänderung will ich noch kurz an die von früheren Beobachtern gefundenen Werthe erinnern. Die Versuche von Beetz<sup>1)</sup> ergaben eine Zunahme des Widerstandes, deren Grenzwert  $\Delta w = (w_m - w_u)/w_u$  bei 0,036 liegt. Auerbach<sup>2)</sup>, der geglühte und ungeglühte Eisen- und Stahlstäbe untersuchte und dabei in den einen Fällen eine Zunahme, in den anderen eine Abnahme des Widerstandes bemerkte, erhielt für  $\Delta w$ -Werthe, welche innerhalb der Grenzen  $+0,0281$  und  $-0,0186$  liegen. Während die von Adams<sup>3)</sup> beobachtete Zunahme im Betrage von 1% noch zwischen den Auerbach'schen Grenzwerten liegt, will Tomlinson<sup>4)</sup> eine solche von 6% gefunden haben, eine Aenderung, deren unwahrscheinlich hoher Werth vermuthen lässt, dass Temperatursteigerungen oder Inductionsströme seine Messungen beeinträchtigt haben. Neuerdings hat Goldhammer<sup>5)</sup> für  $\Delta w$  Werthe gefunden, die im Maximum 0,036 betragen. Chwolson<sup>6)</sup> endlich gibt für die Zunahme des Widerstandes Werthe an, welche von 0,052 mit wachsender Stromstärke stetig ansteigen bis auf 0,0433. Nun ist der grösste Werth von  $\Delta w$ , den ich erhielt, 0,044 (siehe Tab. 3). Es liegen daher die von mir gefundenen Werthe innerhalb der wahrscheinlichsten Grenzen, und insbesondere stimmen sie mit denjenigen von Chwolson so zu sagen ganz überein.

Es bleibt mir nun nur noch übrig, Herrn Professor Dr. H. F. Weber, in dessen Laboratorium ich diese Untersuchung ausführte, meinen herzlichen Dank auszusprechen für die Freundlichkeit, mit der er mich während meiner Arbeit mit seinem Rathe unterstützte.

Zürich, Phys. Inst. d. Polyt., im November 1888.

1) Beetz, Pogg. Ann. **128**. p. 202. 1866.

2) Auerbach, Wied. Ann. **5**. p. 289. 1878.

3) Adams, Phil. Mag. (5) **1**. p. 153. 1876.

4) Tomlinson, Beibl. **2**. p. 291. 1878.

5) Goldhammer, Wied. Ann. **31**. p. 360. 1887.

6) Chwolson, Carl's Rep. **13**. p. 230. 1877.

**IX. Ueber die electromotorische Kraft des Selens;  
von Augusto Righi.**

Hr. Kalischer hatte aus einem Element, das aus zwei Metallen und aus krystallinischem Selen an Stelle des Electrolyten besteht, nur bei Beleuchtung desselben electrische Ströme erhalten können. In einer Abhandlung unter obigem Titel habe ich dagegen nachgewiesen, dass der Strom auch im Dunkeln besteht, dass aber das Licht seine Intensität verändert (und zwar nicht nur wegen des bekannten Einflusses, den das Licht auf den electrischen Widerstand des Selens ausübt, sondern weil auch die electromotorische Kraft sich ändert). Da der Widerstand des Selens oft sehr gross ist, habe ich in den meisten Fällen die Anwendung des Electrometers jener des Galvanometers vorgezogen und konnte so immer eine electromotorische Kraft in den Selenpaaren nachweisen, auch wenn dieselben vor Belichtung vollständig geschützt waren.

Hr. Kalischer bemerkt nun <sup>1)</sup>, dass, um ganz sicher zu sein, dass das Licht bei der Entstehung jener electromotorischen Kraft nicht theilhaftig ist, es nöthig sei, die Selenelemente im Dunkeln herzustellen und vor der Prüfung jede Belichtung auszuschliessen. Die von mir im Dunkeln an den Selenelementen beobachteten electromotorischen Kräfte wären danach die andauernde Wirkung einer vorhergehenden Belichtung.

Obwohl es an triftigen Gründen nicht fehlen würde, die man heranziehen könnte, zu zeigen, wie wenig befriedigend diese Deutung meiner Versuchsergebnisse sei, will ich mich darauf beschränken, zu berichten, dass ich neuerdings meine in Rede stehenden Versuche wiederholt habe, indem ich die Selenelemente im Dunkeln herstellte und ohne Beleuchtung der Prüfung unterwarf, und dass auch so dieselben die übliche electromotorische Kraft anzeigten. Ich bin dabei folgendermassen vorgegangen. Eine messingene Scheibe wurde auf einer Seite mit einer dünnen Schicht von geschmolzenem Selen bedeckt und alsdann in ein Luftbad gebracht, um das amorphe Selen in krystallinisches zu verwandeln. Der metallene Schrank, der als Luftbad diente,

<sup>1)</sup> Kalischer, Wied. Ann. 35. p. 397. 1888.



war geschlossen und ausserdem in einem vollkommen finsternen Zimmer aufgestellt. Nach der zur Umwandlung des Selens erforderlichen Zeit wurde die Scheibe im Schranke erkalten gelassen und hierauf zur Herstellung des Elementes herausgenommen; die Scheibe wird zu diesem Zwecke auf ein Zinkdrahtnetz oder auf eine Platte aus Zink gelegt. Ohne das finstere Zimmer zu verlassen, setzt man tastend das Element mit den Messinstrumenten, die sich in einem Nebenzimmer befinden, mittelst isolirter Drähte, die die Wand durchsetzen, in Verbindung. Auf diese Weise lässt sich das Vorhandensein einer electromotorischen Kraft nachweisen, welche die Nadel des Electromotors und, wenn die Selenschicht keinen zu grossen Widerstand bietet, öfters auch den Spiegel eines Thomson'schen astatischen Galvanometers ablenkt.

Ich habe hierauf das Selen durch das Zinknetz hindurch belichtet und dabei eine Zunahme der electromotorischen Kraft beobachtet, welche nach Entfernung des Lichtes ihren ursprünglichen Werth annimmt. Ich habe ausserdem neuerdings die Wirkung des Druckes festgestellt, von der ich schon früher gefunden hatte, dass sie der Wirkung des Lichtes entgegengesetzt ist, indem beim Beschweren der auf dem Drahtnetze liegenden Scheibe durch Gewichte die electromotorische Kraft abnimmt. In Kürze: alle Resultate, die ich an Selenelementen, die bei diffusem Lichte bereitet waren, beobachtet hatte, habe ich auch mit solchen, die bei vollkommenem Abschlusse des Lichtes hergestellt waren, erhalten können.

Analoge Ergebnisse fand ich mit Selenscheibchen, welche durch Schmelzen mit Selen zwischen zwei Glasplatten erhalten waren und im Dunkeln krystallinisch gemacht wurden. Ein solches Blättchen zwischen zwei Scheiben aus zwei verschiedenen Metallen oder zwischen einer Metallplatte und ein Drahtnetz gelegt, bildet ein electrisches Paar, welches ohne jede Beleuchtung eine deutliche electromotorische Kraft zeigt. Auf diese Weise wird der Einwand gehoben, dass die beobachtete Wirkung durch die Bildung eines Selenids bedingt sein könnte.

**X. Zur Anwendung des Doppler'schen Principes auf leuchtende Gasmolecüle; von H. Ebert.**

Durch eine Reihe von Versuchen habe ich zu entscheiden versucht, ob das Doppler'sche Princip auf die einzelnen Molecüle eines zum Leuchten gebrachten Gases anwendbar ist oder nicht. Durch astrophysikalische Beobachtungen ist die Gültigkeit dieses Principes für die Lichtemission grösserer bewegter Massen bis zu dem Grade von Sicherheit bestätigt worden, als es die Schwierigkeit der Messungen bisher gestattet hat; in der That liegen die aus Verschiebungen der Spectrallinien berechneten Bewegungen sowohl bei der Sonnenrotation, als auch im Falle der relativen Sonnentranslation gegen eine grosse Zahl von Fixsternen innerhalb der Fehlergrenzen der aus directen Beobachtungen abgeleiteten Werthe.

Ob wir indessen hieraus auf die Gültigkeit des Doppler'schen Principes auch im Falle der Lichtemission der einzelnen Molecüle selbst schliessen dürfen, bedarf der experimentellen Prüfung. Nehmen wir die Gültigkeit des Principes auch hier an, so können wir mit Hülfe der Vorstellungen der kinetischen Gastheorie folgende Consequenzen dieser Annahme entwickeln. Es zeigt sich, dass die in den verschiedensten Richtungen erfolgende Bewegung der leuchtenden Molecüle einen Einfluss auf die Breite der Spectrallinien haben muss. Nun habe ich bei einer früheren Gelegenheit<sup>1)</sup> gezeigt, wie man Beobachtungen von Interferenzen mit hohen Gangunterschieden dazu verwenden kann, um ein Urtheil über die Breite der Spectrallinien zu gewinnen. Man ist also im Stande, mit Hülfe der hohen Interferenzen auch ein Urtheil über die Gültigkeit des Doppler'schen Principes in dem vorliegenden Falle zu gewinnen.

Ein leuchtendes Theilchen,<sup>2)</sup> welches im Ruhezustand

1) H. Ebert, Wied. Ann. 34, p. 39. 1888.

2) Hierher gehörige Folgerungen wurden gezogen von Hrn. F. Lippich, Pogg. Ann. 139, p. 465. 1870; dem Lord Rayleigh, Nature 8, p. 474. 1873; und Hrn. L. Pfaunder, Wien. Ber. 76. Abth. II. p. 852. 1877.

Licht von der Wellenlänge  $\lambda$  aussendet, bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in einer Richtung, welche mit der Beobachtungsrichtung den Winkel  $\vartheta$  bildet; alsdann scheint nach dem Doppler'schen Principe das Theilchen Licht von der Wellenlänge:

$$\lambda' = \lambda \left( 1 - \frac{v}{V} \cos \vartheta \right)$$

auszusenden, wenn  $V$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Da die translatorischen Bewegungen der verschiedenen Molecüle eines Gases mit verschiedenen Geschwindigkeiten erfolgen, so muss eine verbreiterte Spectrallinie resultiren, in welcher die Vertheilung der Helligkeit dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetzes entspricht, wenn wir alle Bewegungsrichtungen als gleichwahrscheinlich voraussetzen.

In erster Annäherung kann man voraussetzen, dass sich alle Molecüle mit derselben mittleren Geschwindigkeit  $u$  bewegen, wo:

$$u = 485 \text{ m} \sqrt{\frac{T}{273 D_0}}$$

ist, ( $T$ : absolute Temperatur,  $D_0$ : Dichte bei  $0^\circ$  auf Luft als Einheit bezogen). In diesem Falle vertheilen sich die einzelnen Wellenlängen gleich dicht über einen Spectralbezirk, dessen Grenzen offenbar den scheinbaren Wellenlängen derjenigen Molecüle entsprechen, welche mit der Geschwindigkeit  $u$  gerade in der Sehlinie auf den Beobachter zu oder von ihm wegfliegen. Man erhält demnach eine Spectrallinie von der mittleren Wellenlänge  $\lambda$  und den Grenzstrahlen:

$$(1) \quad \lambda' = \lambda \left( 1 - \frac{u}{v} \right) \text{ und } \lambda'' = \lambda \left( 1 + \frac{u}{v} \right),$$

welche überall dieselbe Helligkeit besitzt.

Die hier gefundene Breite  $b = \lambda'' - \lambda'$  stellt eine untere Grenze der wirklich vorhandenen Breite dar. Denn die Breiten der wirklich auftretenden Spectrallinien müssen aus zwei Gründen grösser ausfallen: 1) Es kommen erheblich grössere Geschwindigkeiten als die mittlere in dem Gase vor. Freilich ist die Zahl der Molecüle, welche solche grössere Geschwindigkeiten besitzen und darum Licht an Stellen des Spectrums liefern, welche sich weiter von der mittleren Wellenlänge entfernen, in dem Maasse geringer, als ihre Ge-

schwindigkeit den mittleren Betrag übersteigt; die Folge ihres Vorhandenseins wird aber immerhin die sein, dass sich die Spectrallinie über die oben bezeichneten Grenzen erweitert und erst jenseits derselben zu un wahrnehmbaren Helligkeitswerthen allmählich abfällt. 2) Alle Theilchen, welche sich gerade in ihrer gegenseitigen Wirkungssphäre befinden, führen zwar nicht „unregelmässige“, sondern durch den Bau der Molecüle, die Kräfte, mit denen sie aufeinander wirken, und durch die Tiefe, bis zu der sie bei der augenblicklichen Begegnung in ihre Wirkungssphären eindringen, ganz genau bestimmte Schwingungen aus, aber doch Schwingungen, welche von den auf den freien Wegstrecken ausgeführten verschiedenen sind. Wie sich hierbei auch der Eingriff in die Schwingungsweise des einzelnen Molecüles gestaltet, jedenfalls muss dieser Umstand eine weitere Verbreiterung einer jeden Spectrallinie herbei führen.

Die Breite der Spectrallinien hat aber einen Einfluss auf die Interferenzfähigkeit ihres Lichtes.

Eine absolut homogene Spectrallinie mit der Wellenlänge  $\lambda$  (ein Element einer gewöhnlichen Spectrallinie) liefert an einer Platte von  $\Delta$  mm Dicke bei einem Brechungsexponenten  $n$  der Substanz Interferenzen von dem Gangunterschiede:

$$\varphi = \frac{2\Delta n}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}.$$

Wir können uns jede Spectrallinie aus solchen Elementarlinien zusammengesetzt denken und erhalten demnach für eine Spectrallinie von der Breite  $b = \lambda'' - \lambda'$  Differenzen in den Gangunterschieden an einer Stelle mit der Plattendicke  $\Delta$ , welche im Maximum angenähert:

$$D = \varphi' - \varphi'' = \frac{2\Delta n}{\lambda' \lambda''} (\lambda'' - \lambda')$$

Wellenlängen betragen; führt man  $b = \lambda'' - \lambda'$  ein, so wird:

$$D = \frac{2\Delta n}{\lambda} \cdot \frac{b}{\lambda} \text{ oder } D = \varphi \cdot \frac{b}{\lambda}.$$

Erfahrungsgemäss darf nun diese grösste vorkommende Gangunterschiedsdifferenz  $D$  einen gewissen Bruchtheil einer Wellenlänge nicht überschreiten, wenn die Interferenzstreifen dem Auge sichtbar bleiben sollen. Legt man als oberste Grenze

den Wert 0,3 zu Grunde<sup>1)</sup>, so findet man bei gegebenem  $b$  und  $\lambda$  den erreichbaren Maximalgangunterschied  $\Phi$  aus der Gleichung:

$$(2) \quad 0,3 = \Phi \frac{b}{\lambda}$$

Hat man demnach nach Formel 1) die untere Grenze für die Breite  $b = \lambda'' - \lambda' = 2\lambda \cdot u/V$  berechnet, so kann man aus der Formel 2) den Gangunterschied berechnen, den man mit dem Lichte der betreffenden Spectrallinie höchstens erreichen kann.<sup>2)</sup>

Offenbar stellen die so erhaltenen Werthe von  $\Phi$  obere Grenzwerte für die Interferenzfähigkeit dar.

Ich habe für die rothe Wasserstofflinie, die gelben Natriumlinien und die grüne Quecksilberlinie die höchsten noch erreichbaren Gangunterschiede mit einem Apparate bestimmt, dessen nähere Beschreibung ich bereits früher<sup>3)</sup> mitgetheilt habe. Dabei waren der Wasserstoff und das Quecksilber in Entladungsröhren von verschiedenen Formen gebracht; sie wurden durch die Entladungen eines Inductatoriums von mittlerer Grösse zum Leuchten angeregt. Die Quecksilberöhren, welche eine reichliche Menge des Metalles enthielten, sonst aber völlig leer gepumpt waren, wurden in einem Luftbade so weit erhitzt, dass genügende Dampfmassen das Rohr erfüllten.

Das Natrium wurde in der früher beschriebenen Weise<sup>4)</sup> durch Zerstäuben bestimmt concentrirter Salzlösungen im Bunsenbrenner zum Leuchten gebracht.

Die durch directe Beobachtungen ermittelten Maximalgangunterschiede  $\Phi'$  habe ich verglichen mit den unter Annahme der Gültigkeit des Doppler'schen Principes nach der kinetischen Gastheorie aus Formel 1) und 2) berechneten Werthen  $\Phi$ . Bei diesen Berechnungen musste die Temperatur

1) Vgl. hierüber l. c. p. 46.

2) Leider ist durch ein Versehen in der oben angeführten früheren Arbeit (Wied. Ann. 34. p. 39. 1888) die hier mit 2) bezeichnete Formel unrichtig geschrieben worden; es ist daselbst in der ersten der auf p. 47 stehenden Formel das  $\lambda$  linker Hand zu streichen, und die zweite Formel besser durch die hier gegebene Formel 2) zu ersetzen.

3) H. Ebert, Wied. Ann. 34. p. 56 f. 1888.

4) H. Ebert, Wied. Ann. 32. p. 337. 1887.

der leuchtenden Gase bekannt sein. Hr. Eilh. Wiedemann hat zuerst für die unter der Einwirkung electriccher Entladungen zum Leuchten gebrachten Gase nachgewiesen, dass wir hier sehr intensive Lichtemission schon bei verhältnissmässig niedrigen Temperaturen haben können.<sup>1)</sup> Der niedrigste Werth, den man annehmen kann, ist offenbar die Temperatur der Umgebung, also bei den mit Wasserstoff gefüllten Entladungsröhren die Zimmertemperatur, bei den Quecksilberröhren die Temperatur des Luftbades.

Bei dem Natrium wurde die Flammentemperatur zu Grunde gelegt und diese zu 1000° angenommen.

Die folgende Tabelle enthält die gewonnenen Zahlen:

Linie:	H <sub>a</sub>	Na <sub>a</sub>	Hg <sub>a</sub>
$\lambda$	656 $\mu\mu$	589,2	546,0
$t$ (in Cels.)	0°	1000	300
$T$ (absol.)	273	1273	573
$D_0$	0,069	0,8	6,9
$u$	1884 m	1172	267
$b$	0,008 $\mu\mu$	0,004	0,001
$\Phi$	24 610	44 190	163 800
$\Phi'$	64 000	60 000	150 000

Es könnte auffallen, dass beim Natrium so hohe Gangunterschiede erreicht wurden, da die gelben Natriumlinien bekanntlich zu denen gehören, welche schon unter gewöhnlichen Umständen bei nur einigermassen hoher Dispersion erhebliche Verbreiterungen zeigen. Bei Anwendung einer Chlornatriumlösung von der Concentration 1 (g Na): 30 (g aq) wurde allerdings die Breite der Natriumlinien in dem vierten Spectrum eines Rowland'schen Gitters (ca. 14000 Linien auf den engl. Zoll) zu  $\frac{1}{6}$  des Abstandes der beiden Natriumlinien ( $D_1 - D_2$ ) geschätzt; indessen war deutlich zu erkennen, dass sich inmitten der stark verbreiterten Linien eine schmale, ungleich hellere Zone hervorhob. Aus dem beobachteten Gangunterschiede von 60000 Wellenlängen berechnet sich die Breite der Spectrallinie zu  $\frac{1}{120}$  ( $D_1 - D_2$ ). Dieser Gangunterschied wurde erhalten bei dem Zerstäuben einer Lösung von doppeltkohlensaurem Natron von der Concentration 1 (g Na): 10000 (g aq).

1) Eilh. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 298. 1879.

Durch eine besondere Versuchsreihe habe ich mich direct von dem Einflusse der Concentration und der Wahl des Salzes auf die Interferenzfähigkeit des Lichtes überzeugt.

Es zeigte sich, dass mit zunehmender Concentration, also mit zunehmender Dampfmenge in der Flamme, bei allen Salzen die Interferenzfähigkeit erst langsam, dann aber sehr schnell abnimmt, was im wesentlichen darauf zurückzuführen ist, dass von einer bestimmten Dampfmenge an die Breite der Spectrallinien sehr rasch wächst. Die grosse Breite der Natriumlinien unter den gewöhnlichen Verdampfungsbedingungen (bei directem Einbringen einer Salzperle in die Flamme) erklärt sich somit aus der grossen Menge von Dampf, welche gleichzeitig in den verschiedenen Theilen der Flamme vorhanden ist.

Bei dem Quecksilber waren die Interferenzstreifen bei 150 000 Wellenlängen Gangunterschied noch völlig scharf; die oberste Grenze der Interferenzfähigkeit war hier also noch nicht erreicht. Indessen wurde ein weiteres Verfolgen der Streifen dadurch sehr erschwert, dass bei der grossen Entfernung, in welcher die Interferenzgläser im vorliegenden Falle stehen mussten (ca. 40 mm) die geringsten Lockerungen der Schrauben oder die kleinsten Verrückungen des Apparates die Streifen aus dem Gesichtsfeld bringen mussten. Hier verschwanden also die Streifen nicht infolge einer sich geltend machenden Unhomogenität der Lichtquelle, sondern infolge von Einstellungsfehlern. Es war ersichtlich, dass der Maximalgangunterschied über 164 000 Wellenlängen liegen muss.

Damit ist auch in diesem Falle wie in den übrigen durch die Versuche der Beweis erbracht worden; dass man in Wirklichkeit viel höher mit den Gangunterschieden aufsteigen kann, als man nach der Theorie dürfte.

*Die unter Annahme der Gültigkeit des Doppler'schen Principes für den Fall der leuchtenden Molecüle berechneten Breiten der Spectrallinien fallen viel grösser aus, als sie in Wirklichkeit sein können.*

Ein Blick auf die gemachten Annahmen zeigt, dass dabei überall die der Beobachtung ungünstigsten, der Theorie günstigsten Werthe eingeführt wurden. Bei dem

Wasserstoff z. B. wurde die Temperatur  $0^{\circ}$  angenommen; doch musste die wirkliche Temperatur des Gases bei weitem höher liegen, denn der capillare Theil der Entladungsröhre, dessen Licht ausschliesslich verwendet wurde, erhitze sich in kurzer Zeit so stark, dass er nicht mehr mit der Hand berührt werden konnte. Das in die Rechnung eingeführte, sicher zu niedrige  $T$ , muss also ein zu kleines  $u$  ergeben. Wenn wir aber diese mittlere Geschwindigkeit  $u$  zur Berechnung der Breite  $b$  verwenden, so vernachlässigen wir, wie oben ausgeführt wurde, einen grossen Theil der Randstrahlen, das erhaltene  $b$  ist also erst recht zu klein. Diesem zu kleinen Werthe entsprechend stellt der daraus abgeleitete Werth  $\Phi = 24600$  einen Gangunterschied dar, den man in Wirklichkeit mit dieser Linie nie erreichen dürfte, wenn die Theorie richtig wäre. In Wirklichkeit beobachtet man aber noch ohne Schwierigkeit Interferenzstreifen, deren Gangunterschied mehr als das Doppelte des theoretisch berechneten oberen Grenzwertes beträgt.

Hier findet sich also eine auffallende Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung.

Diese Differenz tritt noch viel erheblicher hervor, wenn wir die in neuester Zeit mitgetheilten Zahlen der Herren A. Michelson und W. Morley<sup>1)</sup> zum Vergleiche heranziehen. Diesen gelang es, mit ihren ausnehmend grossen Hilfsmitteln bei der Natriumlinie noch Interferenzstreifen zu sehen, welche Gangunterschieden von 200 000 Wellenlängen entsprechen. Bei dem Quecksilber konnte sogar bis zu Gangunterschieden von 540 000 Wellenlängen fortgeschritten werden. Man kann also sagen:

*Wenn das Doppler'sche Princip sich auch für die Bewegung ganzer leuchtender Massen als gültig erwiesen hat, so darf es doch nicht ohne Weiteres auf die Bewegung der einzelnen leuchtenden Molecüle angewendet werden.*

Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle näher auf den Grund dieser Nichtübereinstimmung einzugehen; es genügt, vorläufig den Thatbestand zu constatiren. Indessen

1) A. Michelson u. W. Morley, Am. Journ. of Science (3) 34. p. 430. 1887; Beibl. 12. p. 477. 1888. A. Michelson, Proc. of the Amer. Ass. for the Advancement of Science. 37. Sep.-Abdr. p. 10. 1888.



möchte ich auf einen Unterschied der beiden hier in Betracht kommenden Fälle aufmerksam machen: Haben wir einen Complex schwingender Molecüle, so setzen sich die von jedem einzelnen Molecül erregten Aetherwellen zu einer resultirenden Welle zusammen; diese ist es, auf welche wir im Falle leuchtender Gestirne das Doppler'sche Princip anwenden. Im Falle des einzelnen Molecüles haben wir es mit den oscillatorischen Bewegungen der lichterregenden Aetherpartien selbst zu thun.

Erlangen, Phys. Inst. der Univ., Sept. 1888.

### **XI. Die Photometrie der diffusen Zurückwerfung; von E. Lommel.**

(Aus den Sitzungsber. d. math. phys. Classe d. K. Acad. zu München,  
mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

In einer früheren Abhandlung „über Fluorescenz“<sup>1)</sup> habe ich in einem: „Ueber die Grundsätze der Photometrie“, überscribenen Abschnitt gezeigt, dass in der theoretischen Photometrie nicht, wie bis dahin üblich war, die Flächenelemente einer leuchtenden Oberfläche, sondern die Volumenelemente des leuchtenden Körpers als lichtstrahlend zu betrachten seien. Demgemäss wurden der theoretischen Behandlung photometrischer Probleme die folgenden drei Sätze zu Grunde gelegt:

I. Die von einem Volumenelement nach einem anderen strahlende Lichtmenge ist dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional.

II. Die von einem Volumenelement ausstrahlende und auf ein Flächenelement fallende Lichtmenge ist dem Cosinus des Incidenzwinkels proportional.

III. Das von einem Volumenelement ausstrahlende Licht wird auf seinem Wege innerhalb des strahlenden Körpers nach Maassgabe des Absorptionsgesetzes geschwächt.

1) Lommel, Wied. Ann. 10. p. 449 u. 631. 1880.

Der Lambert'sche Satz vom Cosinus des Emanationswinkels war hierdurch aus der Reihe der photometrischen Grundsätze ausgeschieden und an seine Stelle der vorstehende Satz III gesetzt worden. Das Cosinusetz ergab sich vielmehr jetzt als Folgerung aus den obigen Grundsätzen, jedoch nur für undurchsichtige glühende Körper; für Selbstleuchter, die für Licht durchlässig sind, wie z. B. Flammen, gilt das Cosinusetz nicht.

In der citirten Arbeit wurde auf der Grundlage obiger Sätze nur das Verhalten selbstleuchtender (glühender und fluorescirender) Körper in Betracht gezogen, dagegen das ungleich schwierigere Problem der mit erborgtem Lichte durch diffuse Reflexion leuchtenden Körper, als mit dem Thema jener Abhandlung nicht in unmittelbarem Zusammenhang stehend, unberührt gelassen.

Auch bei den zerstreut reflectirenden Substanzen war seit Lambert für das von ihnen zurückgestrahlte Licht das Cosinusetz angenommen worden. Dasselbe liess sich jedoch weder theoretisch begründen, noch zeigte es sich mit den Beobachtungen in befriedigendem Einklang. Auf diese namentlich auch für die Photometrie der Planeten bedeutungsvolle Sachlage hat neuerdings Seeliger<sup>1)</sup> mit Nachdruck hingewiesen und insbesondere an einer Reihe Beobachtungen gezeigt, dass von einer experimentellen Bestätigung des Lambert'schen Cosinusetzes für zerstreut reflectirende Körper nicht die Rede sein kann. Durch diese Arbeiten Seeliger's angeregt, habe ich die vorliegende bereits 1880 begonnene Arbeit wieder aufgenommen, welche sich die Aufgabe stellt, das Verhalten diffus reflectirender Körper aus den obigen Grundsätzen der Photometrie zu entwickeln.

1. Wenn durch die Fläche  $d\omega$  des Volumenelementes  $d\omega dq = dv$  eines beleuchteten das Licht diffus zurückwerfenden Körpers die Lichtmenge  $d\omega$  (d. i. auf die Flächeneinheit die Einheit der Lichtmenge) senkrecht eindringt, so sei:

$$l d\omega dq$$

die Lichtmenge, welche von dem Volumenelement nach allen Richtungen hin zerstreut wird. Die Grösse  $l$  nennen wir

1) Seeliger, Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellsch. 20. p. 267 1885; 21. p. 216. 1886.

das Diffusionsvermögen des Körpers. Dasselbe ist unabhängig von der Farbe des einfallenden Lichts und wird nur bedingt von dem Grade der Trübung, Pulverisirung, Zerstäubung, Schaumbläschenbildung, Rissigkeit u. s. w. des zerstreuen Körpers; für einen vollkommen klaren (limpiden) Körper ist das Diffusionsvermögen  $l = 0$ .

2. Da das Lichtbündel von der Intensität  $d\omega$ , indem es die Strecke  $d\rho$  durchläuft, die nach allen Seiten hin zerstreute Lichtmenge  $ld\omega d\rho$  einbüsst, so erleidet es durch die Diffusion eine Schwächung, die nach demselben Gesetze erfolgt, wie diejenige durch Absorption.

3. Gleichzeitig wird es aber noch geschwächt durch eigentliche Absorption, sowohl beim Durchgang durch die diffundirenden Körpertheilchen selbst, als auch beim Durchgang durch das klar durchsichtige Zwischenmittel, welches die Zwischenräume zwischen jenen Theilchen erfüllt. Durch diese Absorption verliert es noch die Lichtmenge:

$$k d\omega d\rho,$$

wo das Absorptionsvermögen  $k$  eine Function der Wellenlänge ist, da ja Körpertheilchen und Zwischenmittel „gefährdet“ sein können.

4. Die bisher gemachte Annahme, dass das Volumenelement ein gerades Prisma mit zur Richtung des einfallenden Lichtbündels parallelen Seitenkanten sei, ist durchaus nicht nothwendig. Das Volumenelement kann nämlich, welche Gestalt es auch haben mag, parallel zu den einfallenden Lichtstrahlen in schmale gerade Prismen zerlegt gedacht werden, deren jedes in der angegebenen Weise auf das durchgehende Licht einwirkt. Durch ein beliebig gestaltetes Volumenelement werden daher einem Lichtbündel, das für die Einheit des Querschnittes die Einheit der Lichtmenge mit sich führt, durch Absorption und Diffusion die Lichtmengen:

$$k dv \quad \text{und} \quad ldv$$

entzogen.

5. Die Lichtmenge  $ldv$  wird von dem Volumenelement nach allen Richtungen ringsum ausgestrahlt. Nehmen wir an, dass die Strahlung nach allen Richtungen hin gleichmässig erfolge, so wird die Oberfläche  $4\pi$  einer Kugel, welche mit dem Radius 1 um das Volumenelement beschrieben ge-

dacht wird, von der Lichtmenge  $ldv$  gleichmässig erleuchtet. Die Lichtmenge, welche das Element  $dv$  nach einer beliebigen Richtung pro Flächeneinheit dieser Kugel aussendet, beträgt daher:

$$\frac{l}{4\pi} dv.$$

6. Wir bestimmen nun die Lichtmenge, welche eine unendlich dünne lichtstrahlende planparallele Schicht, deren Leuchtkraft für die Einheit des Volumens  $F$  beträgt, nach einem Volumenelement  $dv$  sendet, welches ebenso wie jene Schicht selbst in ein Mittel, dessen Absorptionsvermögen  $k$ , und dessen Diffusionsvermögen  $l$  ist, eingebettet liegt. Ist  $\varrho$  der Abstand der Schicht von dem Elemente  $dv$ ,  $d\varrho$  ihre Dicke, und theilen wir sie durch eine Schaar gerader Kreiskegel, die  $dv$  als gemeinschaftliche Spitze und  $\varrho$  als gemeinschaftliche Axe haben, in schmale Elementarringe, so ist, wenn  $\alpha$  den halben Oeffnungswinkel eines beliebigen dieser Kegel bezeichnet, der Rauminhalt eines solchen Ringes:

$$2\pi\varrho^2 \operatorname{tg} \alpha \sec^2 \alpha d\alpha d\varrho.$$

Dieser Ring sendet nach dem Volumenelemente  $dv$ , welches von allen seinen Punkten die Entfernung  $\varrho \sec \alpha$  besitzt, die Lichtmenge:

$$dv \cdot \frac{F}{4\pi} \cdot \frac{2\pi\varrho^2 \operatorname{tg} \alpha \sec^2 \alpha d\alpha d\varrho}{\varrho^2 \sec^3 \alpha} e^{-(k+l)\varrho \sec \alpha}$$

oder, wenn wir noch der Kürze wegen:

$$k + l = m$$

setzen, die Lichtmenge:

$$\frac{1}{2} F dv d\varrho d\alpha \operatorname{tg} \alpha e^{-m\varrho \sec \alpha},$$

weil ja das Licht auf seinem Wege  $\varrho \sec \alpha$  einerseits nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung und andererseits durch Absorption und Diffusion geschwächt wird.

Um die gesammte Lichtmenge zu erhalten, welche von der Schicht, die wir uns von unbegrenzter Ausdehnung denken, dem Volumenelemente  $dv$  zugestrahlt wird, hat man diesen Ausdruck nach  $\alpha$  von  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$  zu integrieren. Setzen wir:

$$\varrho \sec \alpha = x, \text{ folglich } \operatorname{tg} \alpha d\alpha = \frac{dx}{x},$$

so wird:

$$\int_0^{\infty} e^{-m \rho} \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{e^{-m x}}{x} dx = -\operatorname{li} e^{-m \rho}, \quad \text{wo:}$$

$$\operatorname{li} e^{-m \rho} = C + \log m \rho - m \rho + \frac{1}{2} \cdot \frac{(m \rho)^2}{2!} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(m \rho)^3}{3!} + \dots$$

der sogenannte Integrallogarithmus, und:

$$C = 0,5772157$$

die Constante des Integrallogarithmus ist.

Die dem Volumenelemente  $dv$  von der Schicht  $d\rho$  zu-  
strahlte Lichtmenge beträgt demnach:

$$- \frac{1}{2} F dv d\rho \operatorname{li} e^{-m \rho}.$$

7. Gehört die Schicht  $d\rho$  einem durch Diffusion leuch-  
tenden Körper an, und liegt sie in der Tiefe  $r'$  parallel unter  
der gleichmässig beleuchteten ebenen Oberfläche des Körpers,  
so ist  $F$  offenbar eine Function von  $r'$  ( $= F(r')$ ). Befindet  
sich das Volumenelement  $dv$  in der Tiefe  $r$  unter der Ober-  
fläche, so ist:

$$\rho = r - r', \quad d\rho = -dr',$$

und man hat, um die Lichtmenge zu finden, welche das  
Volumenelement  $dv$  von den darüber liegenden Schichten  
empfängt; das Integral:

$$- \frac{1}{2} dv \int_0^r F(r') \cdot \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr'$$

zu bilden. Für die Schichten unterhalb  $dv$  ist:

$$\rho = r' - r, \quad d\rho = dr',$$

und das Integral:

$$- \frac{1}{2} dv \int_r^R F(r') \cdot \operatorname{li} e^{-m(r'-r)} dr'$$

gibt die Lichtmenge an, welche das Volumenelement  $dv$  von  
rückwärts erhält, wenn  $R$  die Gesamtdicke des als plan-  
parallele Platte gedachten beleuchteten Körpers bedeutet.

Die Lichtmenge, welche die ganze Platte dem in der  
Tiefe  $r$  unter ihrer beleuchteten Oberfläche gelegenen Vo-  
lumenelemente  $dv$  zustrahlt, ist demnach:

$$- \frac{1}{2} dv \left( \int_0^r F(r') \cdot \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr' + \int_r^R F(r') \cdot \operatorname{li} e^{-m(r'-r)} dr' \right).$$

8. Bezeichnen wir mit  $f(r)$  die Lichtmenge, welche auf diese Weise, nämlich indirect durch die diffuse Strahlung sämtlicher Theilchen des zerstreuenden Körpers, der Volumeneinheit in der Tiefe  $r$  unter der beleuchteten Oberfläche zugeführt wird, so ist:

$$f(r) = -\frac{1}{2} \left( \int_0^r F(r') \cdot l i e^{-m(r-r')} dr' + \int_r^R F(r') \cdot l i e^{-m(r-r')} dr' \right).$$

Die Lichtmenge  $F(r')$ , welche die Volumeneinheit in der Tiefe  $r'$  nach allen Seiten ausstrahlt, besteht aber aus zwei Antheilen, nämlich aus dem Antheil, welcher von der unmittelbaren Beleuchtung durch die direct einfallenden Strahlen, und dem soeben besprochenen Antheil, welcher von der allseitigen diffusen Beleuchtung durch die umgebenden Schichten herrührt.

Bezeichnet man daher die der Volumeneinheit an der Oberfläche durch ein paralleles Strahlenbündel aus irgend einer Richtung zugeführte und in den Körper eindringende Lichtmenge mit  $a$ , und den inneren Einfallswinkel mit  $i$ , so ist, wenn  $l$  das Diffusionsvermögen bezeichnet:

$$F(r') = l \left( a e^{-\frac{m r'}{\cos i}} + f(r') \right).$$

Es ergibt sich demnach die Gleichung:

$$f(r) = -\frac{1}{2} l \left( \int_0^r \left( a e^{-\frac{m r'}{\cos i}} + f(r') \right) l i e^{-m(r-r')} dr' + \int_r^R \left( a e^{-\frac{m r'}{\cos i}} + f(r') \right) l i e^{-m(r-r')} dr' \right),$$

aus welcher die unbekannte Function  $f(r)$  zu bestimmen ist.

9. Man kann sich die Function  $f(r)$  zerlegt denken in eine Summe von unendlich vielen Gliedern:

$$f(r) = f_1(r) + f_2(r) + f_3(r) + \dots,$$

wo der erste Antheil  $f_1(r)$  von der erstmaligen indirecten diffusen Reflexion, die folgenden Antheile  $f_2(r)$ ,  $f_3(r)$  ..., dagegen von den indirecten Reflexionen immer höherer Ordnung herrühren. Man hat alsdann:

$$f_1(r) = -\frac{1}{2}al \left( \int_0^r e^{-\frac{mr'}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr' + \int_r^R e^{-\frac{mr'}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(r'-r)} dr' \right),$$

und weiter:

$$f_2(r) = -\frac{1}{2}l \left( \int_0^r f_1(r') \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr' + \int_r^R f_1(r') \operatorname{li} e^{-m(r'-r)} dr' \right),$$

$$f_3(r) = -\frac{1}{2}l \left( \int_0^r f_2(r') \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr' + \int_r^R f_2(r') \operatorname{li} e^{-m(r'-r)} dr' \right),$$

u. s. f., und sieht, dass die Glieder der obigen unendlichen Reihe durch successive Quadraturen gefunden werden können.

10. Die Function  $f_1(r)$  ist leicht zu ermitteln. Setzen wir nämlich in dem ersten der beiden Integrale  $r - r' = x$ , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} -\int_0^r e^{-\frac{mr'}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr' &= e^{-\frac{mr}{\cos i}} \int_0^{\frac{mx}{\cos i}} e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} dx \\ &= \frac{\cos i}{m} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left( e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} - \int e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} \frac{mx}{x}} dx \right) \\ &= \frac{\cos i}{m} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left( e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} - \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} \frac{mx}{x}} \right), \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} -\int_0^r e^{-\frac{mr'}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr' &= \frac{\cos i}{m} \left( e^{-\frac{mr}{\cos i}} \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} \frac{mr}{x}} - \operatorname{li} e^{-\frac{mr}{x}} \right) \\ &+ \frac{\cos i}{m} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left( e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} - \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} \frac{mx}{x}} \right)_{x=0}. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} = e^{\frac{mx}{\cos i}} \left( C + \log mx - mx + \frac{1}{2} \cdot \frac{(mx)^2}{2!} - + \dots \right).$$

und, wenn wir zur Abkürzung:

$$\frac{1-\cos i}{\cos i} m = m' \quad \text{setzen:}$$

$$\operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mx} = C + \log mx + \log \frac{1-\cos i}{\cos i} + m'x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(m'x)^2}{2!} + \dots;$$

demnach:

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{mx}{\cos i}} li e^{-mx} - li e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mx} \\
&= C \left( e^{\frac{mx}{\cos i}} - 1 \right) + \left( e^{\frac{mx}{\cos i}} - 1 \right) \log mx - \log \frac{1-\cos i}{\cos i} \\
&- e^{\frac{mx}{\cos i}} \left( mx - \frac{1}{2} \cdot \frac{(mx)^2}{2!} + \dots \right) - m'x - \frac{1}{2} \frac{(m'x)^2}{2!} - \dots,
\end{aligned}$$

woraus für  $x=0$  hervorgeht:

$$\left( e^{\frac{mx}{\cos i}} li e^{-mx} - li e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mx} \right)_{x=0} = -\log \frac{1-\cos i}{\cos i}.$$

Wir erhalten demnach:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^R e^{-\frac{mr'}{\cos i}} li e^{-m(r-r')} dr' \\
&= \frac{\cos i}{m} \left( e^{-\frac{mr}{\cos i}} li e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} - li e^{-mr} - e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log \frac{1-\cos i}{\cos i} \right).
\end{aligned}$$

Für das zweite in dem Ausdruck für  $f_1(r)$  vorkommende Integral erhalten wir,  $r'-r=x$  setzend, ganz analog:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^R e^{-\frac{mr'}{\cos i}} li e^{-m(r-r')} dr' = -e^{-\frac{mr}{\cos i}} \int_0^{R-r} e^{-\frac{mx}{\cos i}} li e^{-mx} dx \\
&= -\frac{\cos i}{m} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left( li e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} mx} - e^{-\frac{mx}{\cos i}} li e^{-mx} \right)_{x=0}^{R-r},
\end{aligned}$$

und da auf demselben Wege wie oben:

$$\left( li e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} mx} - e^{-\frac{mx}{\cos i}} li e^{-mx} \right)_{x=0} = \log \frac{1+\cos i}{\cos i}$$

gefunden wird, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& - \int_r^R e^{-\frac{mr'}{\cos i}} li e^{-m(r-r')} dr' \\
&= \frac{\cos i}{m} \left( -e^{-\frac{mr}{\cos i}} li e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} m(R-r)} + e^{-\frac{mR}{\cos i}} li e^{-m(R-r)} \right. \\
&\quad \left. + e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log \frac{1+\cos i}{\cos i} \right).
\end{aligned}$$

Wir haben also schliesslich:



$$f_1(r) = a \cos i \frac{l}{2m} \left( e^{-\frac{mr}{\cos i}} l i e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} m r} - e^{-\frac{mr}{\cos i}} l i e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} m(R-r)} \right. \\ \left. + e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} - l i e^{-mr} + e^{-\frac{mR}{\cos i}} l i e^{-m(R-r)} \right).$$

Hieraus folgt für die von den einfallenden Strahlen getroffene Oberfläche ( $r=0$ ):

$$f_1(0) = a \cos i \frac{l}{2m} \left( \log \frac{1+\cos i}{\cos i} + e^{-\frac{mR}{\cos i}} l i e^{-mR} - l i e^{\frac{1+\cos i}{\cos i} mR} \right),$$

und für die Rückseite der Platte ( $r=R$ ):

$$f_1(R) = a \cos i \frac{l}{2m} \left( e^{-\frac{mR}{\cos i}} l i e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mR} - e^{-\frac{mR}{\cos i}} \log \frac{1-\cos i}{\cos i} - l i e^{-mR} \right).$$

11. Ist  $mR$  so gross, dass  $e^{-mR}$  als verschwindend klein angesehen werden kann, d. h. dringt die einfallende Strahlung bis zur Rückseite der nunmehr undurchlässigen Platte nicht in merklichem Betrage vor, so ist selbstverständlich auch  $f_1(R)$  verschwindend klein, und für die Oberfläche ergibt sich:

$$f_1(0) = a \cos i \frac{l}{2m} \log \frac{1+\cos i}{\cos i}.$$

Die in diesem Falle alle jenseits der Tiefe  $R$  gelegenen Schichten merkliches Licht weder empfangen noch ausstrahlen, so kann man geradezu  $R=\infty$  setzen. Man hat demnach für eine undurchlässige Platte ( $R=\infty$ ):

$$f_1(r) = a \cos i \frac{l}{2m} \left( e^{-\frac{mr}{\cos i}} l i e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} m r} + e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} - l i e^{-mr} \right).$$

12. Bei senkrechter Incidenz ( $i=0$ ) erhält man für eine Platte von beliebiger Dicke  $R$ , da:

$$l i e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} m r} + \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} \\ = C + \log m r + \log \frac{1-\cos i}{\cos i} + \frac{1-\cos i}{\cos i} m r - + \dots \\ + \log \frac{1+\cos i}{\cos i} - \log \frac{1-\cos i}{\cos i}$$

sich für  $i = 0$  auf:

$$C + \log 2mr$$

zurückzieht:

$$\begin{aligned} [f_1(r)]_{i=0} &= a \frac{l}{2m} \left( e^{-mr} (C + \log 2mr) - lie^{-mr} - e^{-mr} lie^{-2m(R-r)} \right. \\ &\quad \left. + e^{-mR} lie^{-m(R-r)} \right), \end{aligned}$$

und, wenn die Platte undurchlässig ( $R = \infty$ ) ist:

$$[f_1(r)]_{i=0} = a \frac{l}{2m} \left( e^{-mr} (C + \log 2mr) - lie^{-mr} \right).$$

13. Wir betrachten jetzt, für den Fall einer undurchlässigen Platte (11), den Gang der Werthe von  $f_1(r)$ , indem wir zu den Abscissen  $r$  die Functionswerthe  $f_1(r)$  als Ordinaten einer Curve aufgetragen denken.

Der Differentialquotient:

$$\frac{\partial f_1(r)}{\partial r} = -\frac{al}{2} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left( lie^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} + \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} \right)$$

lässt erkennen, dass die Curve die Ordinatenaxe berührt (da  $li1 = -\infty$  ist), sich sodann bis zu einem Maximum bei:

$$lie^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} = -\log \frac{1+\cos i}{1-\cos i}$$

erhebt, um von da an gegen die Abscissenaxe asymptotisch herabzusinken.

Mit Hülfe von Soldner's Tabelle der Integrallogarithmen<sup>1)</sup> lassen sich die numerischen Werthe von  $f_1(r)$  leicht berechnen. Für senkrechte Incidenz ( $i = 0$ ) sind in der folgenden kleinen Tabelle einige Werthe des Ausdrucks:

$$\frac{2m}{al} [f_1(r)]_{i=0} = e^{-mr} (C + \log 2mr) - lie^{-mr} = y$$

für das Argument  $e^{-mr}$ , unter gleichzeitiger Angabe der zugehörigen Werthe von  $mr$  und  $lie^{-mr}$  zusammengestellt.

Da in diesem Falle:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = -m e^{-mr} (C + \log 2mr)$$

1) Soldner, Théorie et Tables d'une nouvelle fonction transcendante. München 1809.

ist, so bestimmt sich der Werth von  $mr$ , für welchen  $y$  ein Maximum ist, aus der Gleichung:

$$\log 2mr = -C.$$

Man findet hieraus:

$$mr = 0,28073, \quad e^{-mr} = 0,75523, \quad y_{\max.} = 0,95534.$$

$e^{-mr}$	$mr$	$lie^{-mr}$	$y$
1,0	0	$-\infty$	0,69315
0,9	0,10536	-1,77580	0,89384
0,8	0,22314	1,13401	0,95034
0,7	0,35668	0,78095	0,94811
0,6	0,51083	0,54685	0,90603
0,5	0,69315	0,37867	0,83060
0,4	0,91629	0,25295	0,72613
0,3	1,20397	0,15741	0,59352
0,2	1,60944	0,08513	0,43438
0,1	2,30259	0,03239	0,24283
0,01	4,60517	-0,00183	0,02981
0	$\infty$	0	0

14. Auf die Ermittlung der von den Reflexionen höherer Ordnung herrührenden Lichtantheile  $f_2, f_3 \dots$  mit Hülfe der oben (9) angedeuteten Quadraturen müssen wir verzichten, da dieselben zu Integralen führen, die sich auf bekannte Functionen nicht reduciren lassen.

Noch weniger erscheint es möglich, mit den bis jetzt zu Gebote stehenden mathematischen Hilfsmitteln die Function  $f(r)$ , welche für die theoretische Photometrie von fundamentaler Bedeutung ist, in geschlossener Form aus der obigen Bestimmungsgleichung (8) exact zu entwickeln.

Dagegen wollen wir versuchen, wenigstens einen angeneherten Ausdruck für diese Function durch folgende Betrachtungen zu gewinnen.

15. Die Bestimmungsgleichung für die Function  $f(r)$  lautet, wenn man die bereits ermittelte Function  $f_1(r)$  in sie einführt, wie folgt:

$$f(r) - f_1(r) = -\frac{1}{2}l \left( \int_0^r f(r') lie^{-m(r-r')} dr' + \int_r^R f(r') lie^{-m(r'-r)} dr' \right).$$

Durch Differentiation derselben nach  $r$  ergibt sich hieraus zunächst:

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial r} = -\frac{1}{2}l \left( \int_0^r f(r') \cdot \frac{e^{-m(r-r')}}{r-r'} dr' - \int_r^R f(r') \cdot \frac{e^{-m(r'-r)}}{r'-r} dr' \right) \\ + [f(r') lie^{-m(r-r')}]_{r'=r} - [f(r') lie^{-m(r'-r)}]_{r'=r},$$

oder, weil die vom Integralzeichen befreiten Glieder sich wegheben:

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial r} = -\frac{1}{2}l \left( \int_0^r f(r') \cdot \frac{e^{-m(r-r')}}{r-r'} dr' - \int_r^R f(r') \cdot \frac{e^{-m(r'-r)}}{r'-r} dr' \right).$$

Setzt man in diesen Gleichungen in dem ersten Integral  $r - r' = x$ , in dem zweiten  $r' - r = x$ , so lauten sie:

$$f(r) - f_1(r) = -\frac{1}{2}l \left( \int_0^r f(r-x) lie^{-mx} dx + \int_0^{R-r} f(r+x) lie^{-mx} dx \right)$$

und:

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial r} = -\frac{1}{2}l \left( \int_0^r f(r-x) \cdot \frac{e^{-mx}}{x} dx - \int_0^{R-r} f(r+x) \cdot \frac{e^{-mx}}{x} dx \right).$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass die ihrer Natur nach stets positive und endliche Function  $f(r)$  einen ähnlichen Verlauf nimmt wie die Function  $f_1(r)$ ; ihr Differentialquotient  $\partial f / \partial r$  ist positiv unendlich für  $r = 0$ , wird später negativ und verschwindet, wie auch die Function selbst, für  $r = \infty$ . Die Function  $f(r)$  besitzt daher (wenn  $R = \infty$  ist) ein Maximum, das jedoch erst bei einem grösseren Werthe von  $mr$  eintritt, als dasjenige der Function  $f_1(r)$ . Denn ist  $f(r)$  ein Maximum und sonach  $\partial f / \partial r = 0$ , so ist die rechte Seite der letzten Gleichung nothwendig positiv, woraus folgt, dass das Maximum eintritt bei einem Werthe von  $mr$ , für welchen  $\partial f_1 / \partial r$  bereits negativ ist.

16. Da  $-lie^{-mx}$  für  $mx = 0$  unendlich gross ist, und von da mit wachsendem  $mx$  rasch abnimmt, so fallen in dem Ausdruck:

$$f(r) - f_1(r) = \frac{1}{2}l \left( \int_0^r f(r-x) lie^{-mx} dx + \int_0^{R-r} f(r+x) lie^{-mx} dx \right)$$

die Anfangselemente der Integrale in der Nähe von  $x = 0$  gegenüber den späteren bei grösseren Werthen von  $x$  besonders stark ins Gewicht, oder, mit anderen Worten, die in

der Tiefe  $r$  unter der Oberfläche gelegene Schicht wird weit-  
aus am stärksten von den ihr beiderseits unmittelbar an-  
grenzenden Schichten beleuchtet.

Legen wir nun sämtlichen Schichten die in der Tiefe  
 $r$  herrschende Leuchtkraft bei, indem wir  $f(r)$  sowohl statt  
 $f(r-x)$  als auch statt  $f(r+x)$  setzen, so dürfen wir an-  
nehmen, dass der hierbei begangene Fehler verhältnissmässig  
nur gering ausfalle, weil der Factor  $li e^{-mx}$  die Wirkung der  
entfernten Schichten, welches auch ihre Leuchtkraft sein  
mag, nahezu hinwegtilgt, diejenige der nächstliegenden aber  
zu voller Geltung kommen lässt.

Erwägungen dieser Art geben Anlass zu der Vermuthung,  
dass eine Function  $f'(r)$ , welche der Gleichung:

$$f'(r) - f_1(r) = -\frac{1}{2} l f'(r) \left( \int_0^r li e^{-mx} dx + \int_0^{R-r} li e^{-mx} dx \right)$$

genügt, nicht allzu weit von der Function  $f(r)$  abweiche und  
daher annähernd statt ihrer gesetzt werden könne.

17. Man findet nun leicht:

$$\int li e^{-mx} dx = \frac{1}{m} (e^{-mx} + mx li e^{-mx})$$

und sonach:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} l \left( \int_0^r li e^{-mx} dx + \int_0^{R-r} li e^{-mx} dx \right) \\ &= \frac{l}{2m} (2 - e^{-mr} - mr li e^{-mr} - e^{-m(R-r)} - m(R-r) li e^{-m(R-r)}) \\ &= \frac{l}{2m} \varphi(r). \end{aligned}$$

Die Function  $\varphi(r)$  bleibt ungeändert, wenn  $r$  mit  $R-r$   
vertauscht wird, d. h. sie ist symmetrisch in Bezug auf die  
Mittelschicht ( $r = \frac{1}{2}R$ ) der Platte und erreicht hier, da:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = m (li e^{-m(R-r)} - li e^{-mr})$$

für  $r = \frac{1}{2}R$  verschwindet, ihren Maximalwerth:

$$\varphi_{\max.} = 2 \left( 1 - e^{-\frac{1}{2}mR} - \frac{1}{2}mR li e^{-\frac{1}{2}mR} \right),$$

welcher kleiner als 2 ist. Als Curve dargestellt, berührt sie  
die Ordinatenaxe und die im Abstand  $R$  mit ihr parallel

gezogene Gerade, d. i. die Vorder- und die Rückseite der Platte, und hat an beiden Stellen den Werth:

$$q(o) = q(R) = 1 - e^{-mR} - mR \operatorname{li} e^{-mR}.$$

Setzen wir  $R = \infty$ , was geschehen kann, wenn bis zur Rückseite der Platte merkliches Licht nicht vordringt, so wird:

$$q(r) = 2 - e^{-mr} - mr \operatorname{li} e^{-mr} = z.$$

Das folgende Tafelchen gewährt einen Ueberblick über den Gang der Werthe dieser Function.

$e^{-mr}$	$z$	$e^{-mr}$	$z$
1,0	1,00000	0,4	1,83178
0,9	1,28710	0,3	1,88952
0,8	1,45305	0,2	1,93701
0,7	1,57854	0,1	1,97458
0,6	1,67935	0,01	1,99843
0,5	1,76247	0	2,00000

Da in diesem Falle:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -m \operatorname{li} e^{-mr}$$

immer positiv ist, so erkennt man, dass die Curve, welche den Verlauf der Functionswerthe versinnlicht, sich von dem Punkte  $z = 1$ , wo sie die Ordinatenaxe berührt, mit immer langsamerer Steigung erhebt, indem sie der Geraden, welche in der Höhe 2 parallel zur Abscissenaxe läuft, asymptotisch zustrebt.

18. Als Ausdruck der Function  $f'(r)$  ergibt sich nunmehr:

$$f'(r) = \frac{f_1(r)}{1 - \frac{l}{2m} q(r)}.$$

Dieselbe besitzt in der That im allgemeinen die Eigenschaften, welche der echten Function  $f(r)$  zukommen müssen. Da:

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{2(k+l)}$$

stets  $< \frac{1}{2}$ , und demnach:

$$\frac{l}{2m} q(r) < 1$$

ist, so ist  $f'(r)$  stets positiv, endlich und  $> f_1(r)$ , und verschwindet für  $r = \infty$ ; der Differentialquotient:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\left(1 - \frac{l}{2m} \varphi\right) \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{l}{2m} f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r}}{\left(1 - \frac{l}{2m} \varphi\right)^2}$$

zeigt, dass die Curve, welche den Verlauf der Functionswerte veranschaulicht, die Ordinatenaxe in der Höhe:

$$\frac{f_1(o)}{1 - \frac{l}{2m} \varphi(o)}$$

berührt, sich sodann zu einem Maximum erhebt, welches bei einem grösseren Werthe von  $mr$  eintritt als dasjenige der Function  $f_1(r)$ , um sich alsdann (falls  $R = \infty$  gesetzt wird) asymptotisch gegen die Abscissenaxe herabzusenken.

Die aus den successiven indirecten Reflexionen entspringenden Lichtantheile werden, falls wir  $f(r)$  durch  $f'(r)$  ersetzen, durch folgende abnehmende geometrische Reihe dargestellt:

$$f'_1 = f_1, \quad f'_2 = \frac{l}{2m} \varphi f_1, \quad f'_3 = \left(\frac{l}{2m} \varphi\right)^2 f_1, \quad f'_4 = \left(\frac{l}{2m} \varphi\right)^3 f_1, \quad \dots$$

Dem Beitrag der ersten indirecten Reflexion bleibt demnach, auch wenn wir  $f'(r)$  statt  $f(r)$  setzen, die volle Genauigkeit gewahrt.

19. Bezeichnen wir wie früher mit  $F(r)$  die gesammte Leuchtkraft pro Volumeneinheit in der Tiefe  $r$  unter der Oberfläche, so sendet ein daselbst befindliches Volumelement  $d\omega dr$  unter dem (inneren) Emanationswinkel  $\epsilon$  nach dem Element  $d\omega$  der Oberfläche die Lichtmenge:

$$\frac{1}{4\pi} F(r) e^{-\frac{mr}{\cos \epsilon}} d\omega dr.$$

Die gesammte aus der ganzen Tiefe der Platte, deren Dicke =  $R$ , nach dem Oberflächenelemente  $d\omega$  unter diesem Winkel gelangende und durch dasselbe (wenn keine Reflexion nach innen stattfindet) ausgestrahlte Lichtmenge beträgt:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} \int_0^R F(r) e^{-\frac{mr}{\cos \epsilon}} dr, \quad \text{oder da: } F(r) = l \left( a e^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r) \right) \text{ ist:}$$

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} l \int_0^R \left( a e^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r) \right) e^{-\frac{mr}{\cos \epsilon}} dr.$$

20. Setzt man an die Stelle der Function  $f(r)$  die Function  $f'(r)$ , so hat man annähernd:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} l \left( a \int_0^R e^{-\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} m r} dr + \int_0^R \frac{f_1(r)}{1 - \frac{l}{2m} q(r)} e^{-\frac{m r}{\cos \varepsilon}} dr \right).$$

Ist  $\vartheta$  ein zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  liegender Bruch, so kann man schreiben:

$$\int_0^R \frac{f_1(r)}{1 - \frac{l}{2m} q(r)} e^{-\frac{m r}{\cos \varepsilon}} dr = \frac{1}{1 - \frac{l}{2m} q(\vartheta R)} \int_0^R f_1(r) e^{-\frac{m r}{\cos \varepsilon}} dr.$$

Nun sind in dem Ausdruck:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} l \left( a \int_0^R e^{-\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} m r} dr + \frac{1}{1 - \frac{l}{2m} q(\vartheta R)} \int_0^R f_1(r) e^{-\frac{m r}{\cos \varepsilon}} dr \right)$$

beide Integrale leicht zu berechnen. Indem man bei Berechnung des zweiten von der Formel:

$$\int e^{-ax} li e^{-bx} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} li e^{-bx} + \frac{1}{a} li e^{-(a+b)x}$$

wiederholt Gebrauch macht, erhält man:

$$\begin{aligned} L = & \frac{d\omega}{4\pi} a \frac{l}{2m} \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left( 1 - e^{-\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} m R} \right) \\ & + \frac{d\omega}{4\pi} a \cdot \frac{\left(\frac{l}{2m}\right)^2}{1 - \frac{l}{2m} q(\vartheta R)} \cdot \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left\{ (\cos i + \cos \varepsilon) \left( e^{-\frac{m R}{\cos i}} \right. \right. \\ & + e^{-\frac{m R}{\cos \varepsilon}}) li e^{-\frac{m R}{\cos i}} + e^{-\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} m R} \left[ \cos i \left( \log \frac{1 - \cos i}{\cos i} - li e^{\frac{1 - \cos i}{\cos i} m R} \right) \right. \\ & + \cos \varepsilon \left( \log \frac{1 - \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} - li e^{\frac{1 - \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} m R} \right) \\ & + \cos i \left( \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} - li e^{-\frac{1 + \cos i}{\cos i} m R} \right) \\ & \left. \left. + \cos \varepsilon \left( \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} - li e^{-\frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} m R} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

21. Unter den zugelassenen Voraussetzungen stellt dieser Ausdruck das Incidenz- und Emanationsgesetz für eine be-



liebige dicke Schicht eines durch diffuse Reflexion lichtstrahlenden Körpers dar.

Man sieht, dass der Ausdruck ungeändert bleibt, wenn Incidenz- und Emanationswinkel miteinander vertauscht werden.

Ist  $mR$  sehr klein, d. h. entweder die Summe aus Absorptions- und Diffusionsvermögen  $m$ , oder die Dicke  $R$  der Schicht sehr gering, so wird die ausgestrahlte Lichtmenge der Dicke der Schicht proportional und unabhängig von Einfallswinkel und Ausstrahlungswinkel.

Wenn  $l/2m$  so klein ist, dass im Nenner des zweiten Gliedes  $l/2m \cdot \varphi$  ( $\vartheta R$ ) gegen 1 vernachlässigt werden kann, so erscheint der Ausdruck von der unbekannten Grösse  $\vartheta$  befreit, und reducirt sich auf sein erstes Glied, wenn auch die zweite Potenz von  $l/2m$  ausser Acht gelassen werden darf. Es trifft dies zu, wenn  $k$  sehr gross gegen  $l$  ist, also bei nahezu schwarzen Körpern, oder bei farbigen Körpern für diejenigen Strahlen, welche sehr stark absorbiert werden.

22. Dringt bis zur Rückseite der Platte merkliches Licht nicht vor, d. h. kann  $e^{-mR}$  als verschwindend klein oder, was dasselbe ist,  $mR$  als unendlich gross angesehen werden, so zieht sich der Ausdruck  $L$  auf den folgenden weit einfacheren zurück:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} a \frac{l}{2m} \cdot \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left( 1 + \frac{\frac{l}{2m}}{1 - \frac{l}{2m} \varphi} \left[ \cos i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right] \right),$$

wo  $\varphi$  eine noch zu bestimmende Constante bedeutet, deren Werth zwischen 1 und 2 liegt.

Diese Formel, welche ausser von  $i$  und  $\varepsilon$  nur noch von dem Verhältniss des Absorptions- zum Diffusionsvermögen abhängt, hätte nun für undurchsichtige diffus reflectirende Körper als neues Emanationsgesetz an die Stelle des bisher in der Photometrie angenommenen Lambert'schen Cosinusetzes zu treten. In ihr bedeuten  $i$  und  $\varepsilon$  den inneren Incidenz- und Emanationswinkel; findet beim Eintritt und Austritt keine Brechung statt, was z. B. der Fall ist, wenn der

Zwischenraum der diffundirenden Theilchen mit Luft erfüllt ist, so sind diese Winkel innen und aussen die nämlichen.

Für senkrechte Incidenz ( $i = 0$ ) wird der obige Ausdruck:

$$L = a \frac{d\omega}{4\pi} \left[ \frac{l}{2m} \cdot \frac{2 \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} + \frac{\left(\frac{l}{2m}\right)^2}{1 - \frac{2}{2m} q} \cdot \frac{2 \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \left( \log 2 + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right) \right].$$

23. Die Lichtmenge  $M$ , welche bei senkrechter Incidenz von dem Flächenelement  $d\omega$  nach allen Seiten hin ausstrahlt und von einer Halbkugel aufgefangen wird, die mit dem Radius 1 von  $d\omega$  aus beschrieben ist, ergibt sich, wenn der vorstehende Ausdruck  $L$  mit  $2\pi \sin \varepsilon d\varepsilon$  multiplicirt und nach  $\varepsilon$  von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$  integrirt wird. Nun ist:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \sin \varepsilon d\varepsilon = 1 - \log 2, \quad \text{ferner:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \sin \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} d\varepsilon &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} \log \frac{1+x}{x} dx \\ &= \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) (\log(1+x) - \log x) dx \\ &= \int_0^1 (x-1) (\log(1+x) - \log x) dx + \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx, \end{aligned}$$

also endlich, da die beiden ersten Integrale leicht zu berechnen sind, und bekanntlich:

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{ist:}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \cdot \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \cdot \sin \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} - 2 \log 2 + \frac{1}{2} (\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}.$$

Setzt man diese Werthe in das Integral:

$$M = 2\pi \int_0^{\pi/2} L \sin \varepsilon d\varepsilon$$

ein, so erhält man:

$$\frac{M}{a d \omega} = A_0 = \frac{l}{2m} (1 - \log 2) + \frac{\left(\frac{l}{2m}\right)^2}{1 - \frac{l}{2m} \varphi} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (1 + \log 2)^2 \right].$$

Dieser Ausdruck bedeutet die von der Einheit der Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers, wenn sie von der Einheit der Lichtmenge beleuchtet wird, nach allen Seiten diffus zurückgestrahlte Lichtmenge; er entspricht also dem Lambert'schen Begriff „Albedo“.

Die Albedo ist hiernach, da  $\varphi$  eine absolute Constante bedeutet, nur von der Grösse  $l/2m$  oder, da:

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{2(k+l)} = \frac{1}{\frac{2}{k} + 1}$$

ist, nur von dem Verhältniss  $k/l$  des Absorptions- zum Diffusionsvermögen abhängig und erscheint bei farbigen Körpern vermöge der Grösse  $k$  als Function der Wellenlänge.

24. Der denkbar höchste Grad der „Weisse“ würde einem Körper zukommen, der auf sichtbare Strahlen gar keine Absorption ausübt. Da in diesem Falle  $k = 0$  zu setzen wäre, so müsste für einen „absolut weissen“ Körper:

$$\frac{l}{2m} = \frac{1}{2}$$

sein. Ein solcher Körper aber gibt, wenn er undurchlässig ist, alles ihn treffende Licht zurück, oder seine Albedo ist der Einheit gleich. Setzen wir daher in der obigen Gleichung  $l/2m = \frac{1}{2}$ , so muss aus ihr die „absolute“ Albedo  $A_0 = 1$  hervorgehen. Durch diese Gleichung:

$$1 = \frac{1}{2} (1 - \log 2) + \frac{1}{4 - 2\varphi} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (1 + \log 2)^2 \right]$$

wird die Constante  $\varphi$  bestimmt. Setzen wir der Kürze wegen:

$$1 - \log 2 = 0,30685 = p$$

$$\text{und:} \quad 1 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (1 + \log 2)^2 = 0,38909 = q,$$

so ergiebt sich aus ihr:

$$\varphi = 2 - \frac{q}{2-p} \quad \text{oder} \quad \varphi = 1,77020.$$

Diese Zahl hat man sich von nun an in den Ausdrücken

für  $L$  (22) und  $A_0$  (23) an die Stelle von  $q$  gesetzt zu denken.

25. Die Lichtmenge  $M$ , welche ein Oberflächenelement  $d\omega$  einer beliebig dicken Platte bei beliebiger Incidenz nach allen Seiten hin ausstrahlt, kann übrigens auch ganz exact ausgedrückt werden, freilich nur durch ein Integral, welches auf bekannte Functionen nicht zurückführbar ist. Man hat nämlich, von dem Ausdruck:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} l \int_0^R \left( a e^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r) \right) e^{-\frac{mr}{\cos s}} dr$$

ausgehend, sofort:

$$M = d\omega \cdot \frac{l}{2} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( a e^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r) \right) e^{-\frac{mr}{\cos s}} \sin \varepsilon d\varepsilon dr.$$

Nun wird, wenn man:

$$\frac{r}{\cos \varepsilon} = x \text{ und demnach } \sin \varepsilon d\varepsilon = r \frac{dx}{x^2}$$

setzt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{mr}{\cos s}} \sin \varepsilon d\varepsilon &= r \int \frac{e^{-\frac{mx}{x^2}}}{x^2} dx = -r \frac{e^{-\frac{mx}{x^2}}}{x} - mr \int \frac{e^{-\frac{mx}{x^2}}}{x} dx \\ &= -\frac{r}{x} e^{-\frac{mx}{x^2}} - mr \operatorname{li} e^{-\frac{mx}{x^2}} = -\cos \varepsilon e^{-\frac{mr}{\cos s}} - mr \operatorname{li} e^{-\frac{mr}{\cos s}}, \end{aligned}$$

folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{mr}{\cos s}} \sin \varepsilon d\varepsilon = e^{-\frac{mr}{\cos s}} + mr \operatorname{li} e^{-\frac{mr}{\cos s}}.$$

Man hat demnach für die gesammte allseitig ausgestrahlte Lichtmenge:

$$M = d\omega \frac{l}{2} \int_0^R \left( a e^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r) \right) \left( e^{-\frac{mr}{\cos s}} + mr \operatorname{li} e^{-\frac{mr}{\cos s}} \right) dr.$$

Derselbe Ausdruck muss auch hervorgehen, wenn man die Lichtmenge berechnet, welche von sämtlichen Schichten der Platte nach einem Elemente  $d\omega$  der Oberfläche gesendet wird und durch dasselbe ausstrahlt, falls keine Reflexion nach innen stattfindet. Denn ist  $F(r)$  die Leuchtkraft der

Volumeneinheit in der Tiefe  $r$  unter der Oberfläche, so ist die Lichtmenge, welche ein Elementarring (vergl. 6) der da selbst liegenden Schicht von der Dicke  $dr$  nach dem flächenelement  $d\omega$  sendet, da dieses von den Strahlen unter dem Einfallswinkel  $\alpha$  getroffen wird:

$$d\omega \cdot \frac{1}{2} F(r) e^{-\frac{mr}{\cos \alpha}} \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha d\alpha dr,$$

welcher Ausdruck, nach  $\alpha$  von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$ , nach  $r$  von 0 bis  $R$  integrirt, da ja:

$$F(r) = l \left( a e^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r) \right)$$

ist, sofort den obigen Werth für  $M$  liefert.

26. Für eine Platte von solcher Dicke, dass sie kein Licht durchgehen lässt ( $R = \infty$ ), haben wir, indem wir von dem bereits oben (17) eingeführten Functionszeichen  $q$  Gebrauch machen:

$$e^{-mr} + mrl e^{-mr} = 2 - q(r)$$

und demnach:

$$M = d\omega \frac{l}{2} \left( a \int_0^{\infty} e^{-\frac{mr}{\cos i}} (2 - q(r)) dr + \int_0^{\infty} f(r) (2 - q(r)) dr \right).$$

Setzen wir nun in dem zweiten Integral näherungsweise:

$$f'(r) = \frac{f_1(r)}{1 - \frac{l}{2m} q(r)}$$

statt  $f(r)$ , so wird dasselbe:

$$\int_0^{\infty} f_1(r) \cdot \frac{2 - q(r)}{1 - \frac{l}{2m} q(r)} dr = \frac{2 - q}{1 - \frac{l}{2m} q} \int_0^{\infty} f_1(r) dr,$$

wenn wir unter  $q$  eine zwischen 1 und 2 liegende Constante verstehen. Wir haben alsdann annähernd:

$$M = d\omega \frac{l}{2} \left( a \int_0^{\infty} e^{-\frac{mr}{\cos i}} (2 - q(r)) dr + \frac{2 - q}{1 - \frac{l}{2m} q} \int_0^{\infty} f_1(r) dr \right),$$

wo nun beide Integrale sich ohne Schwierigkeit berechnen lassen.

Man findet nämlich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} a l \int_0^{\infty} e^{-\frac{m r}{\cos i}} (2 - q(r)) dr &= \frac{1}{2} a l \int_0^{\infty} e^{-\frac{m r}{\cos i}} (e^{-m r} + m r l i e^{-m r}) dr \\
&= \frac{1}{2} a l \left( \int_0^{\infty} e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} m r} dr + \int_0^{\infty} e^{-\frac{m r}{\cos i}} m r l i e^{-m r} dr \right) \\
&= a \frac{l}{2 m} \left[ -\frac{\cos i}{1+\cos i} e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} m r} - \frac{\cos^2 i}{1+\cos i} e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} m r} \right. \\
&\quad \left. - \cos i e^{-\frac{m r}{\cos i}} m r l i e^{-m r} - \cos^2 i e^{-\frac{m r}{\cos i}} l i e^{-m r} \right. \\
&\quad \left. + \cos^2 i l i e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} m r} \right]_0^{\infty} \\
&= a \frac{l}{2 m} \left[ \frac{\cos i}{1+\cos i} + \frac{\cos^2 i}{1+\cos i} - \cos^2 i \log \frac{1+\cos i}{\cos i} \right] \\
&= a \frac{l}{2 m} \cos i \left( 1 - \cos i \log \frac{1+\cos i}{\cos i} \right).
\end{aligned}$$

Ferner ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} l \int_0^{\infty} f_1(r) dr &= a \frac{l^2}{4 m} \cos i \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{m r}{\cos i}} \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} \right. \\
&\quad \left. + e^{-\frac{m r}{\cos i}} l i e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} m r} - l i e^{-m r} \right) dr \\
&= a \left( \frac{l}{2 m} \right)^2 \cos i \left[ -\cos i e^{-\frac{m r}{\cos i}} \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} \right. \\
&\quad \left. - \cos i e^{-\frac{m r}{\cos i}} l i e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} m r} + \cos i l i e^{-m r} - m r l i e^{-m r} - e^{-m r} \right]_0^{\infty} \\
&= a \left( \frac{l}{2 m} \right)^2 \cos i \left[ \cos i \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} + 1 \right. \\
&\quad \left. + \cos i \left( e^{-\frac{m r}{\cos i}} l i e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} m r} - l i e^{-m r} \right) \right]_{r=0}^{\infty} \\
&= a \left( \frac{l}{2 m} \right)^2 \cos i \left( 1 + \cos i \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} + \cos i \log \frac{1-\cos i}{\cos i} \right) \\
&= a \left( \frac{l}{2 m} \right)^2 \cos i \left( 1 + \cos i \log \frac{1+\cos i}{\cos i} \right).
\end{aligned}$$

Wird demnach ein undurchsichtiger zerstreuer Körper durch parallele Strahlen unter dem Einfallswinkel  $i$  beleuchtet, so beträgt die gesammte Lichtmenge, welche ein

Element  $d\omega$  seiner Oberfläche nach allen Seiten hin ausstrahlt:

$$M = a d\omega \cdot \frac{l}{2m} \cos i \left[ 1 - \cos i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} \right. \\ \left. + \frac{(2 - \varphi) \frac{l}{2m}}{1 - \frac{l}{2m} \varphi} \left( 1 + \cos i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} \right) \right].$$

27. Der Quotient  $M : a d\omega = A$ , nämlich:

$$A = \frac{l}{2m} \cos i \left( 1 - \cos i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} \right) \\ + \frac{(2 - \varphi) \left( \frac{l}{2m} \right)^2}{1 - \frac{l}{2m} \varphi} \cos i \left( 1 + \cos i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} \right)$$

stellt nun aber die Albedo in erweitertem Sinne, in ihrer Abhängigkeit von dem Einfallswinkel, dar.

Für senkrechte Incidenz ( $i = 0$ ) ergibt sich hieraus:

$$A_0 = \frac{l}{2m} (1 - \log 2) + \frac{\left( \frac{l}{2m} \right)^2}{1 - \frac{l}{2m} \varphi} (2 - \varphi) (1 + \log 2).$$

Dieser Ausdruck muss mit dem oben (23) bereits gefundenen identisch sein. Hierzu ist nothwendig, dass  $\varphi$  den oben (24) bereits bestimmten Werth:

$$\varphi = 1,77020$$

besitze, und dass ausserdem:

$$(2 - \varphi) (1 + \log 2) = 1 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (1 + \log 2)^2 = q$$

sei. Es ist daher in der That ganz genau:

$$(2 - \varphi) (1 + \log 2) = 0,2298.169315 = 0,38909 = q.$$

28. Die Lichtmenge  $M'$ , welche ein Körper, dessen Oberfläche von allen Seiten her gleichmässig beleuchtet wird, nach irgend einer Richtung ( $\varepsilon$ ) ausstrahlt, wird ausgedrückt durch das Integral:

$$M' = 2\pi \int_0^{\pi/2} L \sin i \, di.$$

Da  $L$  in ganz gleicher Weise von  $i$  wie von  $\varepsilon$  abhängt, so kann sich dieses Integral von dem vorigen:

$$M = 2\pi \int_0^{\pi/2} L \sin \epsilon \, d\epsilon$$

nur dadurch unterscheiden, dass  $i$  und  $\epsilon$  miteinander vertauscht sind. Es ergibt sich daher:

$$M' = a d \omega \frac{l}{2m} \cos \epsilon \left[ 1 - \cos \epsilon \log \frac{1 + \cos \epsilon}{\cos \epsilon} \right. \\ \left. + \frac{(2 - q) \frac{l}{2m}}{1 - \frac{l}{2m} q} \left( 1 + \cos \epsilon \log \frac{1 + \cos \epsilon}{\cos \epsilon} \right) \right],$$

wo die Constante  $q$  denselben Werth hat wie vorher.

29. Für absolut weisse Körper ( $l/2m = \frac{1}{2}$ ) ergibt sich aus den Formeln  $M$  (26) und  $M'$  (28):

$$M = a d \omega \cos i, \quad M' = a d \omega \cos \epsilon.$$

Wir gelangen demnach zu folgenden Sätzen:

Wird ein absolut weisser Körper von parallelen Strahlen aus irgend einer Richtung beleuchtet, so ist die von seiner Oberfläche nach allen Richtungen ausgestrahlte Lichtmenge (die Leuchtkraft seiner Oberfläche) dem Cosinus des Einfallswinkels proportional.

Wird die Oberfläche eines absolut weissen Körpers von allen Seiten her gleichmässig beleuchtet, so ist die von ihr nach irgend einer Richtung ausgestrahlte Lichtmenge dem Cosinus des Emanationswinkels proportional.

Diese für absolut weisse Körper ausgesprochenen Sätze gelten übrigens auch bei farbigen Körpern für diejenigen Farben, deren Absorption als verschwindend gering angesehen werden darf.

Die beiden Sätze zeigen aber, in welchem Sinne und mit welcher Beschränkung das Cosinusetz für den Incidenzwinkel einerseits und den Emanationswinkel andererseits nach unserer Theorie als gültig anzusehen ist.

30. Die Lichtmenge  $N$ , welche der Körper bei allseitiger (diffuser) Beleuchtung nach allen Seiten von sich strahlt, wird erhalten, wenn man  $M$  mit  $2\pi \sin i \, di$  oder  $M'$  mit  $2\pi \sin \epsilon \, d\epsilon$  multiplicirt und sodann nach  $i$  resp.  $\epsilon$  von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$  integrirt. Es ergibt sich:



$$N = 2\pi a d\omega \frac{l}{2m} \left( \int_0^{\pi/2} \sin i \cos i \, di - \int_0^{\pi/2} \cos^2 i \sin i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} \, di \right) \\ + 2\pi a d\omega \frac{(2-q) \left( \frac{l}{2m} \right)^2}{1 - \frac{l}{2m} q} \left( \int_0^{\pi/2} \sin i \cos i \, di \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2} \cos^2 i \sin i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} \, di \right),$$

oder, da:  $\int_0^{\pi/2} \sin i \cos i \, di = \frac{1}{2}$

und:  $\int_0^{\pi/2} \cos^2 i \sin i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} \, di = \frac{2}{3} \log 2 - \frac{1}{6}$  ist:

$$\frac{N}{\pi a d\omega} = A_1 = \frac{l}{2m} \left( \frac{1}{3} - \log 2 \right) + \frac{(2-q) \left( \frac{l}{2m} \right)^2}{1 - \frac{l}{2m} q} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log 2 \right).$$

Dieser Ausdruck, welcher das Verhältniss angibt der allseitig durch das Flächenelement ausstrahlenden Lichtmenge zu der von allen Seiten durch dasselbe eindringenden Lichtmenge  $\pi a d\omega$ , entspricht der von Seeliger<sup>1)</sup> gegebenen Definition der Albedo, wonach diese eine Zahl sein muss, die nur von der Beschaffenheit des zerstreuenden Körpers, dagegen nicht von dem Einfallswinkel abhängig sein darf.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$A_1 = s \frac{l}{2m} + \frac{(2-q)(2-s)}{1 - \frac{l}{2m} q} \left( \frac{l}{2m} \right)^2,$$

so ist in dieser Formel:

$$s = 0,40914;$$

während  $q$  den oben bereits gefundenen Werth:

$$q = 1,77020$$

vorstellt.

Für einen absolut weissen Körper ( $l/2m = \frac{1}{2}$ ) ergibt sich hieraus selbstverständlich  $A_1 = 1$ .

1) Seeliger, Vierteljahrsschr. d. astron. Gesellsch. 21. p. 223. 1886.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.

31. Ist die (Lambert'sche) Albedo  $A_0$  eines Körpers bekannt, so kann aus der Gleichung (23), (27):

$$A_0 = p \frac{l}{2m} + q \cdot \frac{\left(\frac{l}{2m}\right)^2}{1 - \frac{l}{2m} q}$$

die Grösse  $l/2m$  und demnach auch das Verhältniss  $k/l$  des Absorptions- zum Diffusionsvermögen bestimmt werden. Man findet:

$$\frac{l}{2m} = \frac{A_0 q + p}{2(pq - q)} - \sqrt{\frac{(A_0 q - p^2)}{4(pq - q)^2} - \frac{A_0}{pq - q}}.$$

Für Kremserweiss (cerussa albissima), das auf Königs-papier (charta regia albissima) in solcher Dicke aufgetragen war, dass es vollkommen undurchsichtig erschien, fand Lambert<sup>1)</sup> als Mittel aus sieben Beobachtungen die Albedo  $A_0 = 0,4230$ , und für das dicke und fast ganz undurchsichtige Königspapier  $A_0 = 0,4$ . Hieraus berechnet sich für

$$\text{Kremserweiss: } \frac{l}{2m} = 0,42736, \quad \frac{k}{l} = 0,16997;$$

$$\text{Königspapier: } \frac{l}{2m} = 0,42103, \quad \frac{k}{l} = 0,18756.$$

Mittels dieser Werthe berechnet sich die Albedo nach Seeliger's Definition für

$$\text{Kremserweiss: } A_1 = 0,44907,$$

$$\text{Königspapier: } A_1 = 0,42670.$$

32. Nachdem nun in der Formel (22):

$$L = a \frac{d\omega}{4\pi} \frac{l}{2m} \left( \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} + \frac{\frac{l}{2m}}{1 - \frac{l}{2m} q} \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left( \cos i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right) \right),$$

welche das Incidenz- und Emanationsgesetz für undurchsichtige diffus reflectirende Körper darstellt, die Coëfficienten numerisch gegeben sind, lässt sich aus ihr die Lichtmenge  $L$  für jeden Einfalls- und Ausstrahlungswinkel leicht berechnen.

Nehmen wir senkrechte Incidenz ( $i = 0$ ) an, so lautet die Formel:

1) Lambert, Photometria, p. 341. 1760.

$$\frac{4\pi}{ad\omega} L = \frac{l}{2m} \left( \frac{1 + \cos \varepsilon}{2 \cos \varepsilon} + \frac{\frac{l}{2m}}{1 - \frac{l}{2m} q} \cdot \frac{2 \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \left( \log 2 + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right) \right),$$

oder, wenn wir zur Abkürzung:

$$\frac{2 \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon} = P, \quad P \left( \log 2 + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right) = Q,$$

$$\frac{\frac{l}{2m}}{1 - \frac{l}{2m} q} = \mu \quad \text{setzen:} \quad \frac{4\pi}{ad\omega} L = \frac{l}{2m} (P + \mu Q).$$

In der folgenden Tabelle sind die Werthe von  $P$  und  $\log \mu$  für die um je  $10^\circ$  steigenden Werthe des Emissionswinkels  $\varepsilon$  von  $\varepsilon = 0$  bis  $\varepsilon = 90^\circ$  angegeben. In der nächstfolgenden Tabelle ist für Kremserweiss und Königspapier das Verhältniss  $L/L_0$  (unter  $L_0$  die senkrecht ausstrahlende Lichtmenge bei  $\varepsilon = 0$  verstanden) berechnet; zur Vergleichung sind in der letzten Columnne die Werthe von  $\cos \varepsilon$  hinzugefügt.

$\varepsilon$	$P$	$\log Q$	$\varepsilon$	$P$	$\log Q$
$0^\circ$	1,00000	0,14186	$50^\circ$	0,78256	0,00622
10	0,99235	0,13759	60	0,66667	9,91819-10
20	0,96891	0,12432	70	0,50971	9,77205-10
30	0,92820	0,10053	80	0,29591	9,48187-10
40	0,86753	0,06311	90	0,00000	- $\infty$

I. Kremserweiss:  $\log \mu = 0,24433$ .

II. Königspapier:  $\log \mu = 0,21829$ .

$\varepsilon$	I. $\frac{L}{L_0}$	II. $\frac{L}{L_0}$	$\cos \varepsilon$
$0^\circ$	1,00000	1,00000	1,00000
10	0,99087	0,99087	0,98481
20	0,96293	0,96301	0,93969
30	0,91478	0,91499	0,86603
40	0,84391	0,84430	0,76604
50	0,74657	0,74719	0,64279
60	0,61766	0,61851	0,50000
70	0,45094	0,45197	0,34202
80	0,24126	0,24221	0,17365
90	0,00000	0,00000	0,00000

32 \*

Da in dem Ausdruck  $I$  die Winkel  $i$  und  $\varepsilon$  miteinander vertauschbar sind, so gelten die nämlichen Zahlen auch für die verschiedenen Werthe des Incidenzwinkels, wenn der Emanationswinkel constant  $= o$  ist.

33. Vergleichen wir nun diese Zahlen mit den von Seeliger<sup>1)</sup> publicirten Beobachtungsergebnissen. Dieselben sind in den folgenden beiden Tabellen enthalten.

Emanationswinkel  $\varepsilon$  constant.

$i$	Marmor	Papier	Carton	Porzellan
$0^\circ$	1000	1000	1000	1000
10	963	990	981	982
20	920	980	960	942
30	853	970	940	890
40	765	942	917	830
50	655	870	850	730
60	513	712	670	615
70	340	500	380	472
80	165	250	185	253

II. Incidenzwinkel  $i$  constant.<sup>2)</sup>

$\varepsilon$	Marmor	Papier	Carton	Porzellan
$0^\circ$		1000	1000	1000
10	sehr nahe dem Cosinus propor- tional	1054	1044	1004
20		1099	1057	977
30		1148	1048	918
40		1180	1026	831
50		1131	919	720
60		1020	760	590

Von den beobachteten Substanzen entspricht nur der Marmor näherungsweise dem Cosinusgesetz; nach unserer Theorie würde dasselbe nur gelten bei allseitiger (diffuser) Beleuchtung für einen Körper, welcher der absoluten Weisse nahekommt.

Die Zahlen für Papier und Carton stehen zwar denjenigen des neuen Gesetzes näher als denjenigen des Cosinus-

1) Seeliger, Vierteljahrsschr. der astronom. Gesellsch. 20. p. 267. 1885.

2) In der Originaltabelle sind, um die Abweichungen von dem Cosinusgesetz besser hervortreten zu lassen, die Verhältnisse der gemessenen Lichtmengen zu  $\cos \varepsilon$  angegeben; hier sind der Gleichförmigkeit wegen durch Multiplication mit  $\cos \varepsilon$  diese Lichtmengen selbst wieder hergestellt.

gesetzes; doch kann von einer auch nur annähernden Uebereinstimmung nicht die Rede sein. Da diese Materialien jedoch durchscheinend sind, so kann die für vollkommen undurchsichtige Platten abgeleitete Formel (22) auf sie überhaupt nicht angewendet werden, sondern es wäre die complicirtere Formel (20), welche für eine beliebige Dicke der Platte gilt, heranzuziehen. Diese aber würde für eine dünne Schicht die ausgestrahlte Lichtmenge unabhängig von Incidenz- und Emanationswinkel, also durchweg = 1000 ergeben. Ein Anwachsen dieser Lichtmenge mit zunehmendem Emanationswinkel bis zu einem Maximum, wie es aus den Beobachtungsreihen II hervortritt, kann durch das neue Emanationsgesetz ebensowenig wie durch das Cosinusetz dargestellt werden.

Auch mit der dem Lambert'schen sowie dem neuen Gesetz gemeinsamen Forderung, dass Einfalls- und Ausstrahlungswinkel miteinander vertauschbar sein müssen, stehen die Zahlen für Papier und Carton im Widerspruch, falls angenommen wird, dass der constante Emanationswinkel in I dem constanten Incidenzwinkel in II gleich gewählt worden ist.

Dagegen stimmen die für Porzellan gefundenen Werthe mit den aus dem neuen Emanationsgesetz berechneten ziemlich nahe überein, während sie von dem Cosinusetz beträchtlich abweichen. Der Rechnung wurde die Albedo 0,4 zu Grunde gelegt, welche Lambert als ungefähren Werth für weisse Körper überhaupt annimmt. Der constante Emanationswinkel bei I sowie der constante Incidenzwinkel bei II wurden beide = 0 angenommen. Da die beiden Beobachtungsreihen für Porzellan der Bedingung der Vertauschbarkeit von  $i$  und  $\varepsilon$  nicht unbedingt widersprechen, wurden aus ihnen noch die Mittelwerthe  $\frac{1}{2}(I + II)$  gebildet, welche noch besser mit den aus der Theorie berechneten Werthen übereinstimmen. Neben jeder Beobachtungsreihe sind in der folgenden Tabelle in den Columnen  $a$  und  $b$  die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen für das neue Gesetz ( $a$ ) und für das Cosinusetz ( $b$ ) angegeben. Während die Abweichungen bei dem letzteren bis 31 % des beobachteten Werthes ansteigen, erreichen sie bei dem ersten nur 4 %.

i od. $\varepsilon$	be- rech- net	Por- zellan I	a	b	Por- zellan II	a	b	Por- zellan $\frac{1}{2}(I+II)$	a	b
6 <sup>9</sup>	1000	1000	0	0	1000	0	0	1000	0	0
10	991	982	- 9	- 3	1004	+13	+19	993	+ 2	+ 8
20	963	942	-21	+ 2	977	+14	+37	960	- 3	+20
30	915	890	-25	+24	918	+ 3	+52	904	-11	+38
40	844	830	-14	+ 64	831	-13	+65	831	-13	+ 65
50	747	730	-17	+ 87	720	-27	+77	725	-22	+ 82
60	619	615	- 4	+115	590	-29	+80	603	-16	+103
70	452	472	+20	+130	—	—	—	—	—	—
80	242	253	+11	+ 79	—	—	—	—	—	—

Im Vorhergehenden ist zugleich der Weg vorgezeichnet für die theoretische Behandlung des durch einen durchscheinenden trüben Körper hindurchgegangenen diffusen Lichtes; ein näheres Eingehen auf diese Frage möge jedoch einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

## XII. Die Aenderungen des Fluoreszenzvermögens mit der Concentration; von B. Walter.

(Hierzu Taf. VII Fig. 12–20).

In einer kürzlich in diesen Annalen<sup>1)</sup> unter ähnlicher Ueberschrift veröffentlichten Abhandlung hatte ich als Hauptresultat aus meinen Beobachtungen den Satz abgeleitet, dass das Fluoreszenzvermögen einer fluorescirenden Flüssigkeit mit wachsender Verdünnung unaufhörlich zunimmt. Derselbe hatte seiner Einfachheit wegen sehr viel gewinnendes, und er ist denn auch, wie ich später fand, schon früher vermuthungsweise von Lommel ausgesprochen worden.<sup>2)</sup> Nichtsdestoweniger musste es Misstrauen erregen, dass die darin enthaltene Thatsache sich nach keiner Seite hin an bekannte Dinge anlehnte und sich auch ebensowenig zum Aufschluss neuer Gebiete zu eignen schien.

1) B. Walter, Wied. Ann. 34. p. 316. 1888.

2) Lommel, Pogg. Ann. 160. p. 76. 1877.

Schon in jener Arbeit<sup>1)</sup> hatte ich darauf hingewiesen, dass ein definitives Resultat sich erst dann erwarten lasse, wenn man als Erreger der Fluorescenz nicht wie dort ein aus Strahlen sehr verschiedener Wellenlänge zusammengesetztes Licht (Lampenlicht), sondern ausschliessliches homogenes Licht benutze; und in der That hat sich denn auch nach Abstellung dieses, hierselbst im Winter nicht zum umgehenden Mangels eine so erhebliche Umgestaltung des obigen Gesetzes ergeben, dass dasselbe dadurch sofort mit einer ganzen Reihe theils bekannter, theils geahnter Thatsachen der Molecularphysik in Verbindung gebracht wird.

Um mir nun aber bei meinen definitiven Messungen von vornherein ein in jeder Beziehung einwurfsfreies Resultat zu sichern, bedurfte ich vor allem einer genauen mathematischen Theorie der Bildung und Emission des Fluorescenzlichtes unter ganz bestimmten äusseren Bedingungen. Eine solche ist nun bereits von Lommel in der oben erwähnten Abhandlung gegeben; indessen lassen die Ableitungen dieses Physikers für unsere Zwecke doch noch mehrere erhebliche Vereinfachungen zu, weswegen ich sie im Folgenden wiederholen muss.

Es falle senkrecht auf ein gewöhnliches Absorptionsgefäss  $ABCD$  (Fig. 12), mit planparallelen Wänden ein sehr schmaler Streifen,  $RQ$ , parallelen, homogenen Lichtes, dessen Gesamtintensität beim Eindringen in die Flüssigkeit = 1 angenommen wird. Diese Lichtmenge möge, nachdem sie die ganze Flüssigkeitsschicht des Gefässes, deren Dicke ebenfalls = 1 sein mag, durchsetzt hat, auf die Grösse  $a$  abgeschwächt sein, wo man den echten Bruch  $a$  als den Durchlasscoefficienten dieser Lösung bezeichnet.<sup>2)</sup> Nach dem bekannten Lambert'schen Absorptionsgesetze ist dann die Intensität des einfallenden Lichtes, wenn es in die Flüssigkeit hinein bis zu den Dicken  $x$  und  $x + dx$ , d. h. bis zu den Schichten  $LM$  und  $L'M'$  (Fig. 12) vorgedrungen ist, auf  $a^x$ , resp.  $a^{x+dx}$  gesunken, wo ich für  $a^{x+dx}$  nach dem Taylor'schen Satze  $a^x + (dx/1)a^x \log a + (dx^2/1.2)a^x (\log a)^2 + \dots$ , oder unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung  $a^x + dx \cdot a^x \log a$  schreiben kann. In der unendlich dünnen Schicht zwischen

1) B. Walter, l. c. p. 324.

2) Coefficient of transmission (Langley).

$LM$  und  $L'M'$  wird also die Lichtmenge  $a^x - a^{x+dx} = -a^x dx \log a$  absorbiert, und von dieser Grösse nun auch ein Theil zur Erzeugung des Fluorescenzlichtes verbraucht. Derselbe sei etwa  $-f a^x dx \log a$ ; dann ist der Factor  $f$  eben die von uns gesuchte Grösse, nämlich das Fluorescenzvermögen der zur Untersuchung vorliegenden Lösung für das gerade angewandte Licht.

Jenes Fluorescenzlicht breitet sich von seinem Entstehungsorte nach allen Seiten des Raumes hin gleichmässig aus, und es schlägt demnach auch ein constanter Theil desselben, den man etwa durch die Grösse  $-g f a^x dx \log a$  ausdrücken kann, die Richtung auf die Oeffnungseinheit des Spaltes  $S$  des Spectroskops zu ein, vor welchem in unserem Falle aus später zu erörternden Gründen ein totalreflectirendes Prisma  $P$  angebracht ist. Die brechenden Winkel des letzteren sind sämmtlich  $60^\circ$ , sodass demnach nur derjenige Theil des Fluorescenzlichtes in den Spalt gelangen kann, welcher die Flüssigkeit unter einem Winkel von  $30^\circ$  verlässt (s. Fig. 12). Unter diesen Umständen ist der Weg, welchen dieses Licht in der Flüssigkeit zurückzulegen hat,  $x \sec 30^\circ$ , sodass also seine Intensität, wenn man seinen Durchlasscoefficienten mit  $\alpha$  bezeichnet, in der Flüssigkeit auf  $-g f a^x \alpha^{\sec 30^\circ} dx \log a = -g f (a'b)^x dx \log a$  abgeschwächt wird, wo zur Abkürzung  $\alpha^{\sec 30^\circ} = b$  gesetzt ist.

Der Durchlasscoefficient  $\alpha$  ist aber, da das Fluorescenzlicht nicht homogen ist, für die verschiedenen Strahlengattungen desselben verschieden, sodass man demnach die Untersuchungen über die Intensität desselben stets auf eine ganz bestimmte Spectralgegend beschränken muss, was ja mit Hülfe der Ocularspalte des Spectroskops leicht zu erreichen ist.

Die gesammte, von allen Schichten der Flüssigkeit  $ABCD$  (Fig. 12) in den Spalt  $S$  eindringende Menge des Fluorescenzlichtes dieser Wellenlänge wird daher:

$$(1) \quad F = -g f \log a \int_0^1 (a'b)^x dx = g f \frac{(1 - a'b) \log a}{\log(a'b)}$$

sein, unter der Annahme, dass die Grösse  $g$  für alle hinter einander liegenden Schichten des Absorptionsgefässes als con-



stant zu betrachten ist, eine Annahme, die, genau genommen, allerdings nur dann statthaft ist, wenn die Dicke  $BC$  der Flüssigkeitsschicht gegen ihre Entfernung vom Spalte  $S$  vernachlässigt werden kann. Um dieser Voraussetzung bei meinen Versuchen soviel als möglich gerecht zu werden, nahm ich dazu ein Absorptionsgefäss von 2 mm Schichtdicke, während die Entfernung des Spaltes  $S$  von demselben in der Regel 100—200 mm betrug.

Die Gleichung 1) lässt aber in unserem Falle, wo es sich bei der Vergleichung des Fluorescenzvermögens nur um die verschiedenen Concentrationen einer und derselben Substanz handelt, noch eine erhebliche Vereinfachung zu; denn da nach einem experimentell zuerst von Beer<sup>1)</sup> nachgewiesenen Gesetze, dessen Gültigkeit für die Fluoresceinlösungen ich später darthun werde, die Verstärkung der Concentration einer Lösung hinsichtlich ihrer Absorptionsfähigkeit für sämmtliches auffallende Licht gleichbedeutend ist mit einer ebenso grossen Vermehrung der Dicke der durchstrahlten Schicht, so werden sich die auf dasselbe Gefäss bezüglichen Grössen  $a$  und  $a$ , und demgemäss auch  $b$ , bei veränderter Concentration der darin enthaltenen Lösung sämmtlich um dieselbe Exponentialgrösse ändern, sodass also der Quotient  $\log a / \log(ab)$  für alle Verdünnungen einer Substanz constant ist. Da es aber hier nur auf die relativen, nicht auf die absoluten Werthe des Fluorescenzvermögens  $f$  der verschiedenen Verdünnungen ankommt, so kann man mithin diese Constante sowohl wie auch die Constante  $g$  in der Gleichung 1) fortlassen; und diese gibt demnach für das Fluorescenzvermögen:

$$(2) \quad f = \frac{F}{1 - ab},$$

worin nun die drei Grössen  $F$ ,  $a$  und  $b = a^{\sec 30}$  für jeden Concentrationsgrad durch das Experiment bestimmt werden müssen.

Der Körper, auf dessen wässrige Lösungen sich nun meine Messungen dieser Art zunächst bezogen, war das  $NH_4$ -Salz des Fluoresceins.<sup>2)</sup> Dieses, das ich der Kürze halber

1) Beer, Pogg. Ann. 86. p. 78. 1852.

2) Es ist in hohem Grade bemerkenswerth, dass das Fluorescenzspectrum dieses Salzes genau aus denselben Strahlengattungen zusammen-

künftighin einfach als Fluorescein bezeichnen werde, erhält man in concentrirter Lösung am einfachsten dadurch, dass man eine concentrirte wässrige  $NH_3$ -Lösung direct mit der in Form eines rothen Pulvers käuflichen Fluoresceinsäure sättigt, wozu nahezu gleiche Quanta von Stoff und Lösungsmittel erforderlich sind. Diese stärkste Concentration desselben sieht in der Flasche von allen Seiten schwarz aus und zeigt selbst bei Anwendung eines darauf concentrirten Kegels directer Sonnenstrahlen noch keine Spur von Fluorescenz; die ersten, schwachen Anfänge derselben sieht man unter diesen Umständen vielmehr erst bei der Verdünnung  $1/25$ ; von hier ab aber wächst die Intensität des Fluorescenzlichtes bei weiterem Verdünnen ganz ausserordentlich schnell.

Da ich jedoch bei meinen Versuchen nach der oben gegebenen Theorie nur homogenes und parallel gerichtetes Sonnenlicht anwenden durfte, so musste ich als concentrirteste Lösung natürlich eine solche nehmen, bei der das Fluorescenzlicht auch unter diesen Umständen schon eine messbare Intensität besitzt, wozu es etwa einer 100fachen Verdünnung der ursprünglichen, concentrirten Lösung bedurfte. Von dieser Verdünnung ausgehend, die im Folgenden zunächst als concentrirte Lösung ( $1/1$ ) bezeichnet wird, wurden die weiteren Verdünnungsgrade in der Weise hergestellt, dass in der folgenden Lösung immer genau halb soviel Substanz enthalten war wie in der vorhergehenden, weswegen ich in der Folge diese Verdünnungen, mit der concentrirtesten anfangend, der Reihe nach mit  $1/1$ ;  $1/2$ ;  $1/4$ ;  $1/8$  .....  $1/65536$  bezeichnen werde, wo also in der letzten auf einen Theil Fluorescein über 6 Millionen Theile Wasser kommen.

Als Lösungsmittel darf man jedoch nicht blosses Wasser benutzen, weil dann die grösseren Verdünnungen ihr  $NH_3$  nach und nach abgeben — das Fluorescein ist nämlich nur eine schwache Säure und bildet als solche sehr wenig beständige Salze — und damit ihr Fluorescenzvermögen natürlich in entsprechendem Maasse einbüssen würden. Damit daher  $NH_3$  stets im Ueberschuss da ist, versetzt man am besten gleich

gesetzt ist, wie das der Säure selbst, während doch die Absorptionsmaxima beider Körper an ganz verschiedenen Stellen des Spectrums liegen.

das Verdünnungswasser mit 2—3 % einer concentrirten  $NH_3$ -Lösung und überzeugt sich noch jedesmal vor dem Gebrauche einer Lösung einfach durch den Geruch von ihrer alkalischen Reaction.

Die Erregung des Fluorescenzlichtes in diesen einzelnen Verdünnungen hatte, der obigen Theorie zufolge, durch einen schmalen Streifen paralleler, homogener Lichtstrahlen zu geschehen. Zur Beschaffung desselben wurden die Sonnenstrahlen wagerecht durch den verticalen Spalt  $S_1$  (Fig. 13), im Fensterladen des Laboratoriums, geschickt, wo sie in einer Entfernung von 2—3 m auf ein Flintglasprisma  $P_1$  mit vertical stehender brechender Kante fielen, hinter welchem, senkrecht zur Richtung der austretenden Strahlen, eine Sammellinse  $L_1$  von 1 m Brennweite stand. Dieselbe entwarf in nicht ganz 2 m Entfernung hinter sich, bei  $AB$ , ein sehr langes und reines Spectrum, in dem die grösseren Fraunhofer'schen Linien, selbst bei ziemlich grosser Spaltweite  $S_1$ , noch deutlich sichtbar waren und bei dieser Aufstellung natürlich vollkommen gerade Linien bildeten. Dieses Spectrum wurde hier mittelst des schwarzen Schirmes  $AB$  aufgefangen, welcher in der Mitte einen verticalen erweiterungsfähigen Spalt  $S_2$  besass, durch den man nun die gerade gewünschte Strahlengattung hindurchgehen liess. Das so erhaltene homogene Licht fiel weiter auf eine Cylinder-Sammellinse, die um ihre Brennweite vom Spalte  $S_2$  entfernt war und die divergirend aus ihm heraustretenden Strahlen in einen parallelen Streifen verwandelte, genau so wie ihn die oben gegebene Theorie erfordert.

Um die Intensitäten  $F$  des Fluorescenzlichtes der verschiedenen Verdünnungen des Fluoresceins miteinander vergleichen zu können, bedarf es einer vermittelnden Lichtquelle, eines Normallichtes, welches während des Wechsels der Flüssigkeiten in dem Absorptionsgefässe  $ABCD$  (Fig. 12), constant bleibt und sich dabei unmittelbar neben dem im Spectroskope betrachteten Theile des Fluorescenzspectrum's jener Lösungen befinden muss. Das letztere zunächst erreicht man nun sehr leicht mit Hülfe des Vierordt'schen Doppelspaltes, d. h. mit Hülfe zweier, an demselben Spectroskope unmittelbar übereinander angebrachter Spalte, von denen der eine das Fluorescenzlicht des Gefässes  $ABCD$  und der andere

die als Normallicht dienenden Strahlen aufnimmt. Zur Erzeugung der letzteren könnte man etwa eine Petroleumlampe nehmen, aus deren Spectrum ja der Ocularspalt die dem zu untersuchenden Fluorescenzlichte gerade entsprechende Stelle gleichfalls mit heraus schneiden würde; allein, abgesehen von dem durch die Lampe im Zimmer sowohl wie im Spectroskope verbreiteten überflüssigen Lichte, müsste diese Methode auch schon aus dem Grunde sehr fragwürdige Resultate liefern, weil man zwei, in ihren Intensitätsschwankungen voneinander abhängige Lichtquellen, die Petroleumlampe und die Sonne, anwendet, von denen zumal die letztere eine höchst unbeständige Lichtquelle darstellt.

Von allem diesem macht man sich frei, wenn man als Normallicht gleichfalls Fluorescein-Fluorescenzlicht benutzt, und zwar Fluorescenzlicht, welches durch einen Theil desselben Sonnenlichtes erzeugt ist, das auch die Fluorescenz in dem Gefässe  $ABCD$  (Fig. 12) hervorruft. Man erreicht dies in folgender Weise. Ehe der oben beschriebene, nach Art der Zeichnung in Fig. 13 erzeugte Streifen homogener, paralleler Sonnenstrahlen das Gefäss  $ABCD$  der Fig. 12, welches in Fig. 13 als  $G_2$  bezeichnet ist, trifft, muss derselbe durch ein ähnliches Gefäss  $G_1$  gehen, in welchem sich eine Fluoresceinlösung von solcher Concentration und Schichtdicke befindet, dass dieselbe einen möglichst grossen Theil des auffallenden Lichtes durchlässt, dabei zugleich aber ein Fluorescenzlicht ausstrahlt, welches an Intensität etwa in der Mitte zwischen den sämtlichen zu messenden Lichtstärken steht. Dieses Fluorescenzlicht gelangt dann, seine eigene Mutterlösung durchsetzend, nach hinten zu in den zweiten, unteren Spalt  $S_3$  (Fig. 13) des Vierordt'schen Spectralphotometers  $K$ , vor welchem zu diesem Zwecke, ebenso wie vor dessen oberem Spalte, ein totalreflectirendes gleichseitiges Prisma  $P_3$  angebracht ist.

Die Stativ der beiden Gefässe  $G_1$  und  $G_2$  werden so lange auf der Linie des erregenden Strahles hin und her gerückt, bis man die ihnen im Spectroskop entsprechenden Fluorescenzspectren in möglichster Helligkeit sieht;<sup>1)</sup> dann wird

1) Es mag noch erwähnt werden, dass diese Versuchsanordnung auch sehr gut dazu benutzt werden kann, um Fluorescenzspectra verschiedener Substanzen qualitativ und quantitativ zu vergleichen.

das Gefäss  $G_2$  aus seinem Stativ genommen, um so nach und nach mit den einzelnen zu untersuchenden Lösungen gefüllt zu werden. Nach dem Wechseln muss es natürlich immer genau an die alte Stelle gebracht werden, und ebenso muss auch, der Theorie zufolge, der obere Spalt des Spectroskopes  $K$ , in welchen das Fluorescenzlicht von  $G_2$  her eindringt, für die ganze Untersuchungsreihe immer dieselbe Oeffnung behalten, oder wenigstens muss man alle Messungen auf dieselbe Oeffnungseinheit reduciren. Der untere Spalt dagegen, welcher das Fluorescenzlicht von  $G_1$  her aufnimmt, wird so lange weiter, resp. enger geschraubt, bis die beiden im Spectroskope  $K$  übereinander lagernden Fluorescenzspectren, bez. deren herausgeschnittene Theile, gleiche Helligkeit zeigen. Das Verhältniss der beiden Spaltweiten stellt dann bekanntlich das umgekehrte Verhältniss der Intensitäten beider Lichtquellen dar und gibt unmittelbar die Intensität  $F$  des Fluorescenzlichtes der Lösung  $G_2$ , ausgedrückt in Einheiten des Normallichtes in  $G_1$ .

Da aber jenes Verhältniss aus leicht ersichtlichen Gründen von den Intensitätsschwankungen des erregenden Sonnenlichtes vollständig unabhängig ist, so kann die einzige, bei diesen Messungen ausser den Schätzungsfehlern <sup>1)</sup> überhaupt noch in Betracht kommende Fehlerquelle nur von dem mangelhaften Functioniren des Heliostaten und der dadurch veranlassten Verschiebung des durch den Spalt  $S_1$  in das Zimmer eindringenden Strahlenbündels herrühren. Ohne auf die Natur der dadurch veranlassten Fehler einzugehen, will ich nur bemerken, dass dieselben schon bei der geringsten Verschiebung eine ganz bedeutende Grösse annehmen, und dass daher für Versuche dieser Art ein richtig gehender Heliostat die erste Bedingung ist. In Ermangelung eines solchen schützt man sich vor falschen Resultaten wenigstens einigermaßen dadurch, dass man sich noch eine zweite Normallösung von beliebiger Concentration herstellt und dieselbe in einem besonderen Gefässe von Zeit zu Zeit an die Stelle von  $P_2$  bringt, um sich

1) Dieselben sind nicht so gross, wie man vielleicht der geringen Intensität des Fluorescenzlichtes wegen annehmen dürfte. Da vielmehr bei dieser Versuchsanordnung im ganzen Zimmer nur Licht von der Ordnung des zu messenden vorhanden ist, so erhält man selbst bei den geringsten Intensitäten desselben noch sehr gut übereinstimmende Resultate.

durch Messung der Stärke ihres Fluorescenzlichtes zu überzeugen, ob die Versuchsbedingungen noch dieselben geblieben sind. Ist dies nicht der Fall, so hat man in dem Verhältniss des jetzigen zum früheren Resultate einen Reductionsfactor, der die eben gefundene Zahl mit den früher erhaltenen vergleichbar macht. Das Ganze ist jedoch nur ein Nothbehelf und gibt nicht im entferntesten die Genauigkeit einer regelrecht verlaufenden Beobachtung.

Bei meinen eignen Bestimmungen der Grösse  $F$  verwandte ich als Erreger zunächst das Licht, welches im Sonnenspectrum kurz vor der Fraunhofer'schen Linie  $F$  liegt, weil diese Strahlen vom Fluorescein am stärksten absorbiert werden, und ich deshalb mit solchen Erregern bis zu den grösstmöglichen Verdünnungen desselben gehen konnte. Später wurden jedoch als Erreger auch Strahlen angewandt, welche zu beiden Seiten dieses Absorptionsmaximums liegen, und zwar einerseits diejenigen bei  $E45 F$ , und andererseits die bei  $F25 G$  und  $F95 G$ . Alle ergaben in Bezug auf die Aenderungen des Fluorescensvermögens  $f$  mit der Concentration, auf die es schliesslich immer nur ankommt, dasselbe Resultat, sodass deshalb in der Tabelle II, welche die Endergebnisse meiner sämtlichen Messungen enthält, auf die Wellenlänge des erregenden Lichtes keine Rücksicht genommen ist.

Zur Aufstellung jener Tabelle bedarf es nach der Formel (2) ausser der Grösse  $F$  noch des Factors  $1/(1 - ab)$ , worin  $b = \alpha^{\sec 30}$  und  $a$  und  $\alpha$  die Durchlasscoefficienten des erregenden und des erregten Lichtes für 2 mm Schicht des betreffenden Concentrationsgrades bedeuten. Die Bestimmung dieser Grössen geschah in der bekannten Weise mit Hilfe desselben Vierordt'schen Spectralphotometers, das auch zu den oben beschriebenen Intensitätsmessungen des Fluorescenzlichtes gedient hatte<sup>1)</sup>, und zwar wurden bei einer Verdünnung immer gleich in einem Zuge die Durchlasscoefficienten für alle später als Erreger anzuwendenden Wellenlängen und zugleich auch für den Spectralraum des Fluorescein-Fluorescenzlichtes be-

1) Das Instrument, dessen Spalten sich seitlich symmetrisch öffnen, ist von A. Krüss hierselbst gebaut und hat sich in allen Theilen der Untersuchung vorzüglich bewährt.

stimmt. Der Haupttheil dieses Lichtes fällt zwischen  $E$  und  $E\ 35\ F$ ; da es aber für die Genauigkeit der Schätzungen bei schwachen Lichtintensitäten vortheilhaft ist, einen nicht zu schmalen Streifen vor sich zu haben, und ich es deshalb vorzog, bei den Messungen der Intensität des Fluorescenzlichtes jene ganze Breite auf einmal zu nehmen, so theilte ich mir jetzt, bei der Bestimmung der Durchlasscoefficienten, jenen Abschnitt in vier Theile, mass jene Grösse für jeden dieser Theile und nahm schliesslich das arithmetische Mittel dieser vier Messungen als mittleren Durchlasscoefficienten  $\alpha$  des ganzen Fluorescenzlichtes. Die hierdurch verursachte kleine Ungenauigkeit ist für das Endresultat ohne jegliche Bedeutung; denn der Einfluss, welchen die Absorption der Flüssigkeit für ihr eigenes Fluorescenzlicht auf die Intensität des letzteren ausübt, kann, wie ich schon in meiner früheren Arbeit auseinander gesetzt habe<sup>1)</sup>, und wie dies auch aus den Zahlen der nachstehenden Tabelle hervorgeht, stets nur ein sehr unbedeutender sein.

Tabelle I.

Durchlasscoefficienten  $\alpha$  und  $\alpha$ , von 2 mm Fluorescenzlösung für das erregende Licht bei  $E\ 95\ F$  und für das Fluorescenzlicht von  $E - E\ 35\ F$ .

Verdünnung	$\frac{1}{65536}$	$\frac{1}{32768}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{8192}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{256}$
$\alpha$	0,990	0,980	0,960	0,922	0,850	0,720	0,520	0,270	0,073
$\alpha$	1,000	0,999	0,998	0,996	0,992	0,984	0,967	0,936	0,875
$b = \alpha^{\text{sec } 30}$	1,000	0,999	0,998	0,995	0,991	0,981	0,962	0,927	0,857
$\frac{1}{1 - \alpha b}$	100	47,6	23,8	12,2	6,3	3,4	2,0	1,33	1,07

  

Verdünnung	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	
$\alpha$	533	284	206	65	4225	1785	32	1024	
	$10^5$	$10^7$	$10^{12}$	$10^{20}$	$10^{46}$	$10^{76}$	$10^{147}$	$10^{294}$	
$\alpha$	0,766	0,587	0,344	0,118	139	193	373	139	
					$10^4$	$10^6$	$10^{10}$	$10^{17}$	
$b = \alpha^{\text{sec } 30}$	0,735	0,540	0,292	673	717	513	262	166	
				$10^4$	$10^5$	$10^7$	$10^{11}$	$10^{19}$	
$\frac{1}{1 - \alpha b}$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	

1) B. Walter, l. c. p. 319.



Natürlich konnten die Durchlasscoefficienten  $a$  und  $\alpha$  nur für die Lösungen von mittlerer Concentrationen durch den Versuch bestimmt werden, woraus dann diejenigen für die stärksten und schwächsten Concentrationen mit Hülfe des Beer'schen Absorptionsgesetzes berechnet wurden. Die Gültigkeit dieses, mit Recht nicht ganz rückhaltlos anerkannten Gesetzes wurde von mir für das Fluoresceïn nach einer, soviel ich weiss, bisher noch nicht angewandten Methode geprüft, die ihrer grossen Sicherheit und Einfachheit wegen hier kurz angegeben werden soll. Ich nahm dazu zwei verschiedene Absorptionsgefässe, in dessen einem der Schulz'sche Flintglaswürfel eine Dicke von 10 mm besass, während er in dem andern auf eine Glasplatte von nur 1 mm Dicke reducirt war. Die Gefässe selbst hatten im lichten eine Dicke von resp. 11 und 2 mm. Mit dem ersteren mass ich in der gewöhnlichen Weise<sup>1)</sup> z. B. für das Spectrallicht vor  $F$  den Durchlasscoefficienten von 10 mm Schicht der Verdünnung  $1/_{32768}$  und fand dafür 0,92, sodann bestimmte ich an derselben Spectralstelle mit dem zweiten Gefässe den Durchlasscoefficienten von 1 mm Schicht der Verdünnung  $1/_{2048}$  und fand 0,83, während sich aus dem ersten Werthe nach dem Beer'schen Gesetze 0,875 hätte ergeben sollen. Ferner lieferte das erste Gefäss bei der Wellenlänge  $E5 F$  für 10 mm Schicht der Verdünnung  $1/_{512}$  den Durchlasscoefficienten 0,93, und das zweite für dieselbe Wellenlänge als Durchlasscoefficienten von 1 mm Schicht der Verdünnung  $1/_{64}$  den Werth 0,96, während sich aus dem Beer'schen Gesetze 0,94 berechnen würde. Berücksichtigt man die gewaltigen Unterschiede der Verdünnungsgrade, so verlieren diese kleinen Differenzen jegliche Bedeutung, und die Gültigkeit des Beer'schen Gesetzes ist somit fast für die gesammten oben in Rede stehenden Verdünnungen des Fluoresceïns durch vier Messungen, die bequem in einer halben Stunde angestellt werden können, bestätigt.<sup>2)</sup> Dasselbe verliert seine Gültigkeit allerdings, worauf ich in der folgenden Abhandlung zurückkommen muss, von einer bestimmten stärkeren Concentration ( $1/_{8}$ ) an; indessen hat das auf die jetzigen Rechnungen keinen weiteren Einfluss, da es hier nach For-

1) S. z. B. meine frühere Schrift l. c. p. 319 ff.

2) Selbstverständlich habe ich mich nicht mit diesen vierten begnügt.



mel 2) nur auf den Werth des Ausdrucks  $1(1 - ab)$  ankommt, der, wie die Tabelle I zeigt, in diesen Concentrationen schon längst = 1 geworden ist.

Mit diesem letzteren Zahlwerthe hat man nach Formel 2) die in der oben beschriebenen Weise gemessene Intensität  $F$  des Fluorescenzlichtes einer 2 mm dicken Schicht der betreffenden Verdünnung zu multipliciren, um das Fluorescenzvermögen  $f$  derselben zu erhalten. Da aber die für diese Grösse erhaltenen Zahlen, absolut genommen, völlig bedeutungslos sind, vielmehr allein die Aenderungen derselben beim Uebergang von einer Concentration zur anderen ein Interesse darbieten, so sind in der nachstehenden Tabelle II gleich die Verhältnisszahlen des Fluorescenzvermögens einer jeden Concentrationsstufe zu dem der vorhergehenden angegeben, sodass also z. B. die erste Zahl 4,1 unter dem Verhältniss  $\frac{1}{2} : \frac{1}{1}$  bedeutet, dass das Fluorescenzvermögen der Verdünnung  $\frac{1}{2}$  um das 4,1-fache grösser ist als das der Lösung  $\frac{1}{1}$ .

In dieser Tabelle sind meine sämmtlichen Beobachtungsergebnisse, gleichviel ob sie mir etwas unsicher erschienen oder nicht, enthalten, und man findet daher einzelne, von den in der letzten Horizontalreihe angegebenen Mittelwerthen ziemlich abweichende Zahlen. Dieselben wurden der Hauptsache nach stets dadurch veranlasst, dass der mir zu Gebote stehende Heliostat ein nicht sehr sauber gearbeitetes Uhrwerk enthielt und dass mithin, auch bei der sorgfältigsten Einstellung desselben das von ihm ins Zimmer gesandte Strahlenbündel bald schnelle, bald langsame Verschiebungen erfuhr, bald aber auch wieder eine ziemliche Zeit lang genau auf demselben Flecke stand, in welchem Falle die Fehlergrenze stets eine erheblich kleinere wurde. (Folgt Tab. II p. 514.)

Aus der letzten Reihe der Mittelwerthe sieht man, dass das Fluorescenzvermögen des Fluoresceins mit zunehmender Verdünnung zuerst sehr schnell, dann immer langsamer und langsamer wächst, von der Concentration  $\frac{1}{32}$  aber, oder vielleicht auch schon etwas früher, bis zu den grössten Verdünnungen hin constant bleibt. Die kleinen Schwankungen nämlich, welche im letzteren Intervalle die Mittelwerthe noch um die Einheit herum machen, werden sich zwar bei Anwendung eines tadel-

losen Heliostaten noch um ein bedeutendes verkleinern lassen; sie verlieren aber auch so schon jegliche Bedeutung, wenn man berücksichtigt, mit wie delikaten Messungen man es hier zu thun hat.

Tabelle II.

Verhältniss des Fluorescenzvermögens zweier aufeinander folgender Verdünnungen des Fluoresceins.

Verdünnungen	$1/2 : 1/1$	$1/4 : 1/2$	$1/8 : 1/4$	$1/16 : 1/8$	$1/32 : 1/16$	$1/64 : 1/32$	$1/128 : 1/64$	$1/256 : 1/128$
Verhältnisszahlen	4,1	2,21	1,59	1,17	1,21	1,09	0,97	1,01
	4,2	2,39	1,09	1,08	0,99	1,09	0,82	0,92
	6,02	2,14	1,45	1,04	1,10	0,85	1,02	0,81
	4,27	2,65	1,70	1,15	1,18	0,99	1,03	0,99
	4,1	2,15	1,23	1,17	0,96	1,01	1,01	0,92
	4,1	2,07	1,26	1,00	1,22	0,93	1,02	1,04
	3,8	2,25	1,40	1,21	1,09	0,98	0,98	0,98
	4,26	2,86	1,19	1,11	1,02	1,06	0,99	0,89
	4,64	2,08	1,51	1,17	1,01	1,00	0,88	0,92
	—	2,43	—	—	1,21	0,94	1,08	1,09
	—	—	—	—	—	—	—	0,99
	—	—	—	—	—	—	—	0,97
	—	—	—	—	—	—	—	0,99
	—	—	—	—	—	—	—	0,99
	—	—	—	—	—	—	—	1,33
Mittelwerth	4,39	2,32	1,38	1,12	1,10	0,995	0,98	0,985
Verdünnungen	$1/512 : 1/256$	$1/1024 : 1/512$	$1/2048 : 1/1024$	$1/4096 : 1/2048$	$1/8192 : 1/4096$	$1/16384 : 1/8192$	$1/32768 : 1/16384$	$1/65536 : 1/32768$
Verhältnisszahlen	1,01	1,27	0,96	0,97	1,22	0,72	1,03	1,44
	0,86	0,83	0,96	0,92	0,99	0,96	1,21	1,08
	1,06	0,88	1,28	0,80	1,11	1,00	0,96	0,99
	0,91	0,88	0,95	1,03	0,93	0,75	1,06	1,19
	0,93	1,09	0,83	0,99	0,94	1,17	1,30	1,34
	0,97	1,04	1,24	1,20	1,08	1,23	1,10	0,77
	1,02	1,03	1,21	0,88	1,37	0,99	1,07	0,94
	1,07	0,80	0,97	1,20	1,09	0,85	1,08	1,42
	0,98	0,90	1,05	1,13	1,06	0,84	1,06	1,04
	0,90	0,86	0,86	1,13	1,33	1,34	1,04	0,68
	1,01	1,16	0,89	0,93	1,35	0,91	1,00	0,84
	0,89	0,82	1,00	0,85	1,04	1,27	—	—
	0,90	0,99	1,09	0,89	1,03	—	—	—
	1,01	0,98	0,92	0,92	—	—	—	—
	0,89	0,90	0,95	—	—	—	—	—
	0,73	0,96	0,92	—	—	—	—	—
	1,07	0,89	—	—	—	—	—	—
	0,90	1,03	—	—	—	—	—	—
Mittelwerth	0,95	0,96	1,005	0,99	1,11	0,995	1,08	1,06

Die Resultate bleiben in jeder Beziehung dieselben, wenn man statt des Lichtes bei  $F$  irgend eine andere erregungsfähige Wellenlänge des Sonnenspectrums anwendet, und zwar sind in dieser Hinsicht sowohl Strahlen unterhalb wie oberhalb jenes Absorptionsmaximums untersucht worden. Es ist dies ein doppeltwichtiger Umstand, einmal für die Theorie dieser Erscheinungen, andererseits aber auch als Grundlage einer weitergehenden experimentellen Untersuchung. Auf das erstere komme ich in der nachstehenden Abhandlung zurück; hinsichtlich des letzteren aber sind wir jetzt in der Lage, für die ganz concentrirten Lösungen des Fluoresceïns statt des einfarbigen Lichtes auch einfach das weisse, aus dem ersten Spalte  $S_1$  (Fig. 13), kommende Strahlenbündel als Fluoreszenzerreger anwenden und somit unsere Untersuchungen bis zu einer viel stärkeren Concentration ausdehnen zu können.

Wie nämlich nach der letzten Horizontalreihe der Tabelle I für das Licht aus der Gegend bei  $F$  der Factor  $1/(1 - ab)$  schon von der Verdünnung  $1/_{128}$  an  $= 1$  wird, und in Folge dessen bei allen concentrirten Lösungen die Werthe von  $F$  und  $f$  übereinstimmen, so wird bei den ganz concentrirten Lösungen das Gleiche auch für alles andere erregungsfähige Licht gelten. Da aber die Grösse  $f$ , wie soeben angegeben, sich bei veränderter Concentration für alle erregungsfähigen Lichtstrahlen in derselben Weise ändert, dies also bei den ganz concentrirten Lösungen auch für das von jedem einzelnen erzeugte Fluorescenzlicht  $F$ , und mithin auch, wenn alle zugleich wirken, für das gesammte, von ihnen allen erzeugte Fluorescenzlicht gelten muss, so wird demnach bei diesen concentrirtesten Lösungen der Wechsel der Intensität des mit weissem Lichte erzeugten Fluorescenzlichtes zugleich auch den Wechsel des auf homogenes Licht sich beziehenden Fluorescenzvermögens darstellen. Die Richtigkeit dieser Schlüsse lässt sich experimentell sehr einfach dadurch erhärten, dass man bei denjenigen concentrirten Lösungen, deren Fluorescenzvermögen in obiger Weise bereits bestimmt ist, dasselbe noch einmal unter Anwendung von weissem Lichte misst. Man erhält dann Werthe, die thatsächlich mit den in der Tabelle II gegebenen Mittelwerthen sehr gut übereinstimmen.

Somit konnte ich also ohne Bedenken dazu übergehen,

den Wechsel des Fluoreszenzvermögens schon von derjenigen Concentration ab zu bestimmen, bei der unter Anwendung des allerstärksten weissen Sonnenlichtes sich eben der erste Schimmer der Fluoreszenz zeigt. Ich stellte mir eine solche Lösung her, indem ich zu 4,53 g Fluoresceinsäure 6 ccm einer concentrirten, wässerigen  $NH_3$ -Lösung und 14 ccm Wasser hinzusetzte und die so entstandene, völlig klare aber schwarze und syropsähnliche Flüssigkeit noch auf  $\frac{1}{8}$  verdünnte. Diese Lösung mag für die jetzt noch zu besprechenden Versuche als concentrirte Lösung ( $\frac{1}{1}$ ) gelten, während ihre, ebenso wie früher hergestellten Verdünnungen wieder mit  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{8}$ ; ..... bezeichnet werden. Diese Lösungen wurden wieder der Reihe nach in das Gefäss  $G_2$  gebracht, welches aber jetzt, zugleich mit  $G_1$  und dem Spectroskope  $K$  — in derselben Anordnung wie in Fig. 13 — gleich direct in den Weg des weissen aus dem Spalte  $S_1$  kommenden Strahlenbündels gestellt wurde. Um das diffuse Licht von den Gefässen  $G_1$  und  $G_2$  fern zu halten, wurde noch ein Schirm  $FG$  (Fig. 14) mit Spaltvorrichtung etwa  $\frac{1}{2}$  m hinter  $S_1$  angebracht, dessen Spalt  $S_2$  das hier schon länglichrund gewordene Strahlenbündel wieder auf einen schmalen Streifen reducirte. Dieser letztere hatte dann noch, ehe er zu  $G_1$  und  $G_2$  gelangte, durch die beiden Absorptionsgefässe  $A_1$  und  $A_2$  (Fig. 14) zu gehen, wobei sich in jenem eine verdünnte Aesculinlösung und in diesem eine solche von Kupferoxydammoniak befand. Von diesen Flüssigkeiten hielt die erstere das ultraviolette Licht zurück, das in den Glaswänden der beiden Gefässe  $G_1$  und  $G_2$  Fluoreszenzlicht erregt haben würde, welches seiner Brechbarkeit nach theilweise mit dem Fluorescein-Fluoreszenzlicht übereinstimmt und also die Messungen des letzteren hätte beeinflussen müssen; die Kupferoxydammoniaklösung in  $A_2$  dagegen war so beschaffen, dass sie gerade das entgegengesetzte, rothe Ende des Spectrums bis zur Linie  $F$  hin absorbirte und so von den Gefässen  $G_1$  und  $G_2$  alles überflüssige Sonnenlicht, vor allen Dingen aber auch dasjenige fernhielt, welches an Brechbarkeit dem Fluorescein-Fluoreszenzlicht gleichkam. Ein sicherer Beweis, dass keinerlei fremdes Licht die Versuche beeinträchtigt, ist der, dass im Spectroskope  $K$ , bei richtiger Einstellung der Gefässe  $G$ , der Spectralraum zwischen dem

Fluorescenzspectrum und dem Spectrum des diffus in das Instrument gesandten, erregenden Lichtes, also der Abschnitt von *E40 F* bis *F*, vollkommen schwarz erscheint, und erst, wenn dies erreicht ist, wozu meistens auch noch die Schirme *CB* und *ED* (Fig. 14) nöthig sein werden, kann man mit den Messungen beginnen.

Die Resultate der letzteren sind nun in der nachstehenden Tabelle III enthalten, welche genau so wie die Tabelle II eingerichtet ist, nur dass hier gleich die Mittelwerthe hergesetzt sind.

Tabelle III.

Wachsthum des Fluorescenzvermögens bei den concentrirteren Fluoresceïnösungen.

Verdünnungen	$\frac{1}{2} : \frac{1}{1}$	$\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8} : \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} : \frac{1}{8}$	$\frac{1}{32} : \frac{1}{16}$
Verhältnisszahlen	6,3	6,5	3,5	1,8	1,4

Mit einem Blicke übersicht man die in den beiden Tabellen II und III enthaltenen Resultate aus der Curve *ABC* (Fig. 15), deren Ordinaten das Fluorescenzvermögen (*f*) der dazu gehörigen, als Abscissen auf *OV* aufgetragenen Verdünnungsgrade bedeuten. Diese Curve konnte aber bei weitem nicht vollständig gezeichnet werden, da der Theil *BC*, welcher der Abscissenaxe parallel verläuft, wenn er das Intervall meiner Beobachtungen umfassen sollte, über 2000 mal so lang als die Strecke *OF* werden müsste, in Wirklichkeit sich also jedenfalls in derselben Weise weiter bis ins Unendliche erstreckt.

Das in der Curve *ABC* enthaltene Resultat dieser Abhandlung lautet nun:

Das Fluorescenzvermögen der ganz concentrirten Lösungen des Fluoresceïns ist Null oder unendlich klein; erst bei der Verdünnung  $\frac{1}{25}$ <sup>1)</sup> erhält es einen messbaren Werth, um dann bei fortschreitendem Verdünnen sehr schnell und zuerst auch ziemlich gleichmässig anzuwachsen. Schon von der Verdünnung  $\frac{1}{100}$  ab wird aber die Zunahme des Fluorescenzvermögens bei weiter fortgesetztem Verdünnen eine immer all-

1) Die Zahlenangaben sind hier nur ungefähre.

mählichere und hört von der Concentration  $\frac{1}{3200}$  an ganz auf, sodass also das Fluorescenzvermögen von hier ab bis zu unendlich grossen Verdünnungen hin — meine Beobachtungen gehen bis zur Verdünnung  $\frac{1}{6553600}$  — constant bleibt.

Bei den verschiedenen Verdünnungsgraden einer alkoholischen Magdalarothlösung finden, wie ich ebenfalls nach der in dieser Abhandlung entwickelten Methode festgestellt habe, genau dieselben Verhältnisse statt, nur dass von der Curve *ABC* (Fig. 15) etwa der ersten Hälfte von *OF* entsprechende Theil fehlt — offenbar, weil sich vom Naphtalinroth nicht so concentrirte Lösungen herstellen lassen wie vom Fluoresceïn.

Die nähere Angabe der für diesen Körper gewonnenen Beobachtungsergebnisse kann um so eher unterbleiben, als in der nachstehenden Abhandlung unter anderen auch gezeigt werden wird, dass man sich von der Richtigkeit und Allgemeingültigkeit des oben für das Fluoresceïn nachgewiesenen Fluorescenzgesetzes auf einem viel einfacheren Wege, ohne jeglichen experimentellen Aufwand, überzeugen kann.

Hamburg, Phys. Staatslaborat., im Juli 1888.

### XIII. Ueber den Nachweis des Zerfalles von Moleculargruppen in Lösungen durch Fluorescenz- und Absorptionserscheinungen; von B. Walter.

(Hierzu Taf. VII Fig. 12—20.)

Nach den in vorstehender Abhandlung angegebenen Beobachtungen ändert sich das Fluorescenzvermögen des fluoresceïnsauren Ammoniums (Fluoresceïns) bei Veränderung der Concentration seiner wässerigen Lösungen für alles erregungsfähige Licht ohne Unterschied der Wellenlänge in gleicher Weise. Daraus folgt, dass jene Aenderungen nicht durch eine etwa mit dem Verdünnen Hand in Hand gehende veränderte Wirkungsweise des erregenden Lichtes, sondern nur durch die

verschiedenartige Existenzweise der fluorescirenden Substanz selbst hervorgerufen werden.

Die Gestalt des Curve *ABC* (Fig. 15), welche diese Aenderungen angibt, zeigt weiter, dass in dieser Beziehung ein fundamentaler Unterschied zwischen den concentrirten und den dünneren Lösungen dieses Stoffes bestehen muss; und da in den letzteren das Fluorescenzvermögen durchweg constant bleibt, was ja nach der Definition dieser Grösse die Bedeutung hat, dass in allen diesen Lösungen dieselbe Menge Substanz aus gleicher erregender Lichtmenge überall die gleiche Menge Fluorescenzlicht bildet, so ist klar, dass in dieser ganzen Reihe von Flüssigkeiten auch die Grösse, Gestalt und Beschaffenheit der dieses Licht bildenden kleinsten Fluoresceintheilchen dieselben bleiben müssen, sodass, von der Verdünnung *OF* ab, bei weiterem Verdünnen die ganze Einwirkung des Lösungsmittels auf die gelösten Theilchen darin besteht, dieselben örtlich weiter auseinander zu bringen, ohne aber sonst etwas an ihnen zu verändern.<sup>1)</sup> In allen denjenigen Concentrationen dagegen, welche dem Theile *AB* der Curve *ABC* angehören, wird, nach dem Verlauf der letzteren zu schliessen, bei fortschreitender Verdünnung eine Veränderung der darin befindlichen Fluorescein-substanz in der Art vor sich gehen, dass dieselbe dabei immer mehr jenem stationären Endzustande entgegengeht, wie er nach dem Obigen von der Verdünnung *OF* ab stattfindet.

Da nun aber die ganz concentrirte Lösung des Fluoresceins schon so zähflüssig ist, dass von ihr bis zum festen Körper nur noch ein Schritt erscheint<sup>2)</sup>, in dem letzteren aber jedenfalls wie in jedem festen Körper die Molecüle in ganz bestimmten Gruppen zusammenlagern, welche beim Auflösen in gewisser Weise zerfallen, so ist die sich hier von selbst ergebende Erklärung der obigen Fluorescenzerscheinungen die, dass in den concentrirteren Lösungen des Fluoresceins die

1) Für die Fluorescenztheorie im speciellen folgt hieraus noch, dass die weitere oder engere Vertheilung der Fluoresceintheilchen in ihrem Lösungsmittel von hier ab von keinerlei Einfluss mehr auf die Bildung des Fluorescenzlichtes ist, sodass also das Lösungsmittel direct wahrscheinlich überhaupt nicht bei der Entstehung desselben mitwirkt.

2) Beide zeigen auch schon dieselbe Oberflächenfarbe.



Molecüle dieser Substanz noch nicht völlig gelöst d. h. in die kleinstmöglichen Theile, die ich Einzelmolecüle nennen will, getrennt sind, sondern vielmehr noch in bestimmten Molecülgruppen zusammenlagern, welche erst bei fortschreitender Verdünnung mehr und mehr zerfallen. Von einer bestimmten Verdünnung,  $OF$ , ab ist jedoch dieser Zerfall beendet, und nun bewirkt die weitere Verdünnung nichts anderes als eine Vergrößerung des gegenseitigen Abstandes der Einzelmolecüle.

Diese Auffassung, welche in jeder Weise auf dem Boden der heutigen Molecularphysik steht, und für die in der Folge auch noch eine Reihe anderer Beweise angegeben werden soll, hat sich auch durch die Aufhellung mehrerer theils bekannter, theils auch noch ganz unbekannter Fluorescenzerscheinungen vorzüglich bewährt, ausserdem aber auch noch einige andere Thatsachen zu Tage gefördert, welche wieder die Anfänge einer ganz neuen Reihe von Phänomenen zu bilden scheinen.

Um mich in der Folge einfacher ausdrücken zu können, will ich diejenigen Lösungen, in denen die darin befindliche Substanz nach der obigen Auffassung soweit wie möglich gelöst ist, als „vollkommene Lösungen“ oder „Ganzlösungen“ bezeichnen, womit dann zugleich auf die von Hittorf, Lenz, van't Hoff u. a. betonte Analogie derselben mit den vollkommenen Gasen hingewiesen ist; während diejenigen Concentrationen, in denen bei fortschreitendem Verdünnen noch ein continuirlicher Zerfall von Molecülgruppen stattfindet, im Gegensatz dazu „Halblösungen“ oder „unvollkommene Lösungen“ genannt werden sollen. Die Verdünnung  $OF$  endlich, welche auf der Grenze zwischen beiden steht, genau genommen aber mit zu den vollkommenen Lösungen gehört, soll die „kritische Concentration“ heissen.

Die wichtigste Thatsache, welche im Zusammenhang mit den oben beschriebenen Fluorescenzerscheinungen die Existenz der soeben charakterisirten beiden Arten von Lösungen darthut, ist die, dass das Beer'sche Absorptionsgesetz, wonach dieselbe Menge gelöster Substanz auch stets dieselbe Menge Licht absorbirt, gleichviel in welcher Verdünnung sie sich befindet, oder wonach mit anderen Worten das „Absorptionsvermögen“ derselben Gewichtsmenge einer Substanz für alle



Verdünnungen constant bleibt, beim Fluorescein gerade auch nur für diejenigen Verdünnungsgrade gilt, für welche auch das Fluorescenzvermögen dieser Substanz constant bleibt, während dagegen bei den Halblösungen derselben ihr Absorptionsvermögen Aenderungen aufweist, welche mit denen des Fluorescenzvermögens in gewisser Hinsicht parallel laufen. Bezüglich der Gültigkeit des Beer'schen Gesetzes habe ich schon in vorstehender Arbeit gezeigt, dass sie sich für die so sehr lange Reihe der vollkommenen Lösungen des Fluoresceins mittelst des Vierordt'schen Spectralphotometers und zweier Schulz'scher Absorptionsgefässe durch nicht mehr als vier Messungen nachweisen lässt; und ebenso leicht überzeugt man sich auch mittelst derselben Apparate von seiner Ungültigkeit bei den unvollkommenen Lösungen, wenn man, mit der kritischen Lösung anfangend, die Durchlasscoefficienten dieser und der stärkeren Concentrationen in einer passenden Spectralgegend bestimmt. So erhielt ich z. B. für das Licht bei der Fraunhofer'schen Linie *D* als Durchlasscoefficienten einer 1 mm dicken Schicht der Lösungen  $\frac{1}{800}$ ;  $\frac{1}{400}$ ;  $\frac{1}{200}$ ;  $\frac{1}{100}$  resp. die Werthe 0,965; 0,878; 0,602; 0,230, während sich nach dem Beer'schen Gesetze die Zahlen 0,965; 0,931; 0,867; 0,752 entsprechen würden. Die Abweichungen werden also um so grösser, je weiter man sich von der kritischen Lösung entfernt, eine Erscheinung, die mit dem Verhalten des Fluorescenzvermögens dieser Lösungen parallel läuft.

Dieselben Thatsachen gelten auch, wie ich später auf noch einfachere Art zeigen werde, für die Halb-, resp. Ganzlösungen von mehreren anderen theils fluorescirenden, theils nicht fluorescirenden Stoffen. Es erhalten daher das Beer'sche Absorptionsgesetz sowohl wie auch das in vorstehender Abhandlung nachgewiesene Fluorescenzgesetz mit Rücksicht auf die obige Theorie den folgenden höchst einfachen Wortlaut; das erstere: „Jedes einzelne Molecül einer in Lösung befindlichen Substanz absorbirt, so lange es in diesem Einzelzustande verbleibt, von jeder darauf fallenden Lichtgattung stets denselben Bruchtheil, wie gross auch in dem Lösungsmittel sein Abstand von den Nachbarmolecülen sein möge“; und das letztere: „Jedes einzelne Molecül eines in Lösung befindlichen fluoreszirenden Körpers verwandelt, so lange es in diesem Einzelzustande ver-

bleibt, stets denselben Bruchtheil einer absorbirten Lichtintensität in Fluorescenzlicht, wie gross auch in dem Lösungsmittel sein Abstand von den Nachbarmoleculen sein möge“. Beide Sätze lassen sich auch kurz so zusammenfassen: „Absorptionsvermögen und Fluorescenzvermögen eines in Lösung befindlichen Einzelmoleculs bleiben, solange dieser Einzelzustand dauert, durch alle Verdünnungen hindurch constant.“

Sobald aber die Moleculé anfangen, sich zu Gruppen zusammenzulagern, hört auch die Gültigkeit dieser Sätze auf, denn die Absorption einer solchen Moleculgruppe erstreckt sich, wie wir später sehen werden, auch über Wellenlängen, die das Einzelmolecul nicht mehr zu absorbiren vermag, die Fluorescenz dagegen hört in einer solchen Moleculgruppe ganz auf.

Die letztere Behauptung ist nicht so ohne weiteres einleuchtend, vielmehr erscheint es zunächst naturgemässer, die allmähliche Abnahme des Fluorescenzvermögens bei wachsender Concentration der Halblösungen dadurch zu erklären, dass eine Gruppe von zwei Moleculen weniger fluorescirt als das Einzelmolecul, eine Gruppe von dreien weniger als eine solche von zweien u. s. w. Dass dies aber thatsächlich nicht der Fall ist, sondern dass nur das Einzelmolecul fluorescirt, eine Moleculgruppe aber garnicht, wird durch eine sehr schöne Erscheinung dargethan, auf die ich schon in meiner früheren Arbeit — allerdings zu ganz anderen Zwecken, und ohne ihre Bedeutung damals zu ahnen — hinzuweisen Gelegenheit hatte.

„Nicht alles von der Flüssigkeit absorbirte Licht“, heisst es dort<sup>1)</sup>, ist im Stande, die Fluorescenz hervorzurufen. Entwirft man nämlich auf der Vorderseite eines grösseren Absorptionsgefässes, in welches man nach und nach immer stärkere Concentrationen einer fluorescirenden Substanz bringt, ein die Fraunhofer'schen Linien zeigendes Spectrum, so bemerkt man, dass die Erregung des Fluorescenzlichtes zunächst genau der Absorption entspricht, dass jedoch von einer gewissen Concentration an diese Correspondenz aufhört, indem nämlich von jetzt ab die Fluorescenzerregung nach der weniger brechbaren Seite hin sich immer nur bis zu einer ganz bestimmten Wellen-

1) B. Walter, Wied. Ann. 34. p. 322. 1888.

länge erstreckt, während dagegen die Absorption sich auch jetzt noch mit zunehmender Concentration immer weiter über das Spectrum hin ausdehnt. So sind z. B. für das Fluorescein die letzten überhaupt noch erregungsfähigen Strahlen diejenigen aus der Gegend der Fraunhofer'schen Linie *E*, während man Concentrationen dieser Substanz herstellen kann, bei denen die Absorption noch Wellenlängen umfasst, welche in den Spectralabschnitt zwischen *C* und *D* gehören.“

Es ist nach dem oben Gesagten zunächst klar, und die Wiederholung dieser Versuche beim Fluorescein, Magdalaroth, Aesculin u. s. w. bestätigte es auch, dass diejenigen Verdünnungen, in denen „die Erregung des Fluoreszenzlichtes genau der Absorption entspricht“, sämmtlich zu den vollkommenen Lösungen dieser Stoffe gehören, und dass ferner jene „gewisse“ Concentration, von welcher ab hierin eine Aenderung eintritt, die kritische Verdünnung ist. Für die dann weiter bei den concentrirteren Lösungen beobachteten, scheinbar so verwickelten Erscheinungen aber ist die einfache Erklärung die, dass derjenige Theil des von einer solchen Lösung absorbirten Lichtes, welcher darin noch Fluoreszenzlicht erregt, da er sich ja auf den von den vollkommenen Lösungen her bekannten Absorptionsbezirk der Einzelmoleküle beschränkt, auch jetzt noch nach wie vor von Einzelmolekülen absorbirt wird, während alles übrige in der Flüssigkeit zurückgehaltene Licht und darunter auch dasjenige, welches ausserhalb jenes Absorptionsbezirktes der Einzelmoleküle liegt, seine Absorption ausschliesslich den in diesen Lösungen gleichfalls befindlichen Molecülgruppen verdankt, die daraus also, wie jener Versuch zeigt, kein Fluoreszenzlicht zu bilden vermögen.

Aus dieser einen, wichtigen Erscheinung ergeben sich somit drei neue Thatsachen:

1) In den Halblösungen der untersuchten Stoffe sind Einzelmoleküle und Molecülgruppen neben einander enthalten, und zwar vermehren sich mit zunehmender Concentration die letzteren auf Kosten der ersteren.

2) Nur Einzelmoleküle können Fluoreszenzlicht erzeugen.

3) Das Einzelmolekül hat im Spectrum seinen ganz bestimmten Absorptionsbezirk, über welchen hinaus es kein Licht zu absorbiren vermag; die Absorption der Molecülgruppen da-

gegen umfasst gewöhnlich auch noch die angrenzenden Spectraltheile.

Aus den beiden ersten dieser Sätze ergibt sich zunächst, dass das Fluorescenzvermögen einer fluorescirenden Halblösung mit zunehmender Concentration aus dreifachem Grunde abnehmen muss: einmal weil immer weniger Einzelmoleküle da sind, zweitens weil die entstehenden Molekülgruppen bei der Absorption einen immer grösseren Theil des auffallenden Lichtes für sich in Anspruch nehmen, und drittens weil die letzteren auch die Ausstrahlung des bereits gebildeten Fluorescenzlichtes immer mehr und mehr verdecken. Somit ist also die in der vorigen Abhandlung nachgewiesene, mit zunehmender Concentration immer schneller werdende Abnahme des Fluorescenzvermögens der Halblösungen leicht zu verstehen, und ebenso leicht klären sich dadurch auch die Erscheinungen auf, welche man beobachtet, wenn man die verschiedenen Verdünnungen einer fluorescirenden Substanz nach einander in eine grössere Absorptionswanne bringt, auf deren Vorderseite ein wagerecht ausgebreitetes Spectrum fallen lässt und dabei von obenher auf die Flüssigkeit hinabsieht. Da sich auf diesem Wege die kritische Concentration einer jeden fluorescirenden Lösung sozusagen mit einem einzigen Blicke bestimmen lässt, so bedarf es wohl keiner weiteren Rechtfertigung, wenn ich hierauf etwas genauer eingehe.

Die Figuren 16, 17 und 18 geben zunächst die unter obigen Umständen sich darbietenden Ansichten bei drei vollkommenen Lösungen des Fluoresceins, und zwar bezieht sich die erstere auf eine sehr stark verdünnte Lösung, die zweite auf eine solche von mittlerer Concentration und die dritte auf die kritische Lösung selbst. Dabei ist *VW* die von oben gesehene Wanne, durch welche das Spectrum in der Richtung des Pfeils hindurchgeht; die darin schattirten Stellen deuten diejenigen Theile der Flüssigkeit an, welche Fluorescenzlicht aussenden. *RS* ist ein hinter dem Gefässe aufgestellter weisser Schirm, auf welchem das Absorptionsspectrum der Lösungen dadurch abgebildet ist, dass die doppelschraffirten Stellen vollkommen dunkle, die einfach schraffirten halbdunkle Theile desselben bedeuten. Die Fläche *L IK* sendet deshalb kein Fluorescenzlicht aus, weil die davor liegenden

Theile der Flüssigkeit das betreffende Spectrallicht schon vollständig absorbirt haben; und dementsprechend dehnt sich auch der Kernschatten *BC* auf dem Schirme *RS* genau so weit aus wie die Basis *LK* des dunklen Zahnes *LIK* auf der hinteren Wand des Gefässes *VW*. Hieran schliessen sich zu beiden Seiten, zwischen *KG* und *FL*, die die Flüssigkeit ganz durchsetzenden erregenden Strahlen, denen auf dem Schirm die Halbschatten *AB* und *CD* entsprechen, und von denen diejenigen der weniger brechbaren Seite sich besonders in der kritischen Lösung (Fig. 18) zu einem scharfen Lichtkeile, *IKGH*, ausbilden, der bis zu ganz beträchtlichen Tiefen, mehrere Decimeter weit senkrecht in die Flüssigkeit hinein verfolgt werden kann.

Alles dies ist vollständig normal; Absorption und Fluorescenz entsprechen sich vollständig, wie ja auch zu erwarten steht, wenn jedes Einzelmolecül immer denselben Bruchtheil des absorbirten Lichtes in Fluorescenzlicht verwandelt. Sobald man aber in das Gebiet der Halblösungen übergeht, macht sich auch die Wirkung der in der Flüssigkeit anwesenden Molecülgruppen dadurch bemerkbar, dass erstens die Intensität des Fluorescenzlichtes abnimmt, dass zweitens die Fluorescenz-erregung auf der weniger brechbaren Seite nicht mehr wie früher weiter um sich gegriffen hat, trotzdem dies bei der Absorption in beträchtlichem Maasse der Fall ist, und dass endlich drittens der oben erwähnte Lichtkeil, welcher übrigens genau an seiner früheren Stelle verblieben ist, zu einem kurzen Stumpfe zusammengeschrunpft ist. (Fig. 19.) Dieses Abnehmen des Lichtkeils, *IKGH*, beim Uebergang von Ganz- zu Halblösungen geschieht so schnell, dass diese Erscheinung das einfachste Mittel darstellt, um sich eben durch den blossen Hinblick auf eine fluorescirende Lösung zu überzeugen, ob man es mit einer vollkommenen oder unvollkommenen Lösung zu thun hat. Es zeigen nämlich auch die übrigen fluorescirenden Substanzen, z. B. das Magdalaroth, das Aesculin, das schwefelsaure Chinin, die Eosine u. s. w., in ihren kritischen Lösungen denselben scharf ausgeprägten Lichtkeil, wie dies noch in der Fig. 20) für eines der Eosine, eines Körpers mit zwei Absorptionsmaximis, dargestellt ist. Die Buchstaben an der Vorderseite der Wanne bezeichnen hier die Fraunhofer'schen

Linien, welche unter diesen Umständen bekanntlich stets das Fluorescenzlicht wie schwarze Balken durchziehen, und welche, wie hier noch erwähnt werden mag, auch einer praktischen Verwerthung fähig sind. Wenn nämlich z. B. in der Fig. 20 längs der Linie *F* das Fluorescenzlicht 1 cm weit in die Flüssigkeit hinein verfolgt werden kann, so muss es offenbar beim Verdünnen der Flüssigkeit auf  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ....., falls dabei das Fluorescenzvermögen der kleinsten Eosintheilchen constant bleibt, um die 2, 4, 8....fache Länge in die Flüssigkeit eindringen, sodass sich mithin auf diesem, freilich nicht allzu genauen Wege die Constanz, resp. Veränderlichkeit des Fluorescenzvermögens für eine ganze Reihe von Wellenlängen auf einmal durch einfache Längenmessungen feststellen lässt.

Der dritte der drei oben aufgestellten Sätze ist besonders dadurch von Bedeutung, dass er uns die Aussicht eröffnet, unter Umständen auch für Lösungen nicht fluorescirender Farbstoffe einen zweifachen Molecularzustand auf optischem Wege nachzuweisen. Da nämlich das Einzelmolecul nach diesem Satze seinen ganz bestimmten Absorptionsbezirk hat, über welchen hinaus sein absorbirender Einfluss nicht reicht, so muss offenbar eine unendlich dicke Schicht einer vollkommenen Lösung, von welcher Concentration sie auch sei, das gesammte innerhalb jedes Bezirkes liegende Licht absorbiren, das ausserhalb desselben gelegene dagegen völlig ungestört durchlassen. Dies ist nun thatsächlich bis zu einem gewissen Grade der Fall, wie man z. B. bei den vollkommenen Lösungen des Fluoresceïns selbst schon an einer 1 cm dicken Schicht daraus ersieht, dass beim Uebergang von schwächeren zu stärkeren Concentrationen der Rand des Absorptionsstreifens im Gelb immer schärfer wird, dass aber, sobald man in das Bereich der Halblösungen gelangt, derselbe sich plötzlich wieder verwischt, indem das Absorptionsspectrum jetzt einen weit ins Roth hineinragenden Halbschatten zeigt. Man hat demnach in dieser Erscheinung, die allerdings nicht nothwendig stattzufinden braucht, ein einfaches Mittel, um etwaige moleculare Veränderungen in Lösungen nachzuweisen: man stellt sich eine Reihe von gleichmässig an Concentration abnehmenden Lösungen der betreffenden Substanz her, bringt dieselben der Reihe nach in ein Absorptionsgefäss von möglichst grosser Schichtdicke — 5 cm werden meistens

genügen — und misst im Absorptionsspectrum der einzelnen Lösungen die Lage und Breite der die völlig verdunkelten Theile umgebenden Halbschatten. Einige Beispiele, und zwar zunächst solche von fluorescirenden Lösungen, werden dies erläutern.

Tabelle I.

Lage des Halbschattens im Absorptionsspectrum der Fluoreszenzlösungen.  
5 cm Schicht.

Verdünnung	$\frac{1}{6400}$	$\frac{1}{3200}$	$\frac{1}{1600}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{200}$
Halbschatten	156—159,5	152,5—156	150—153	129—150	121—130	?—116

Der Halbschatten, welcher bis zur Verdünnung  $\frac{1}{1600}$  nur drei bis vier Scalentheile umfasst, hat sich hiernach bei der Concentration  $\frac{1}{800}$  plötzlich um das Siebenfache verbreitert; es ist mithin  $\frac{1}{1600}$  als kritische Lösung und der Scalentheil 150<sup>1)</sup>, d. h. das Licht bei  $D77E^2)$ , als die untere Grenze des Absorptionsbezirktes der Einzelmoleküle des Fluoresceins zu betrachten. Die oben beschriebenen Methoden, diese Grössen mit Hülfe der Ausdehnung des Fluoreszenzlichtes zu bestimmen, liefern genau dieselben Resultate; dagegen führte der in der vorstehenden Abhandlung eingeschlagene Weg über die Grösse des Fluoreszenzvermögens nicht zu der Verdünnung  $\frac{1}{1600}$ , sondern  $\frac{1}{3200}$  als kritischer Lösung. Man könnte nun zwar diese kleine Ungenauigkeit sehr gut auf Beobachtungsfehler schieben, indessen glaube ich doch, dass hier eine wirkliche Differenz vorliegt, da das Fluoreszenzvermögen, gewissermassen als die empfindlichste Eigenschaft der Einzelmoleküle, auch schon bei grosser Annäherung derselben aneinander Einbusse erleiden dürfte.

1) Hier, wie auch später beziehen sich die Zahlen auf eine willkürliche Scala, für welche 98,9 *B*; 106,1 *C*; 127,8 *D*; 156,5 *E*; 185,5 *F* und 241,2 *G* bedeutet.

2) D. h. dasjenige, welches von *D* den Abstand  $\frac{77}{100}$  des ganzen Streifens von *D* bis *E* hat.



Tabelle II.

Lage des Halbschattens im Absorptionsspectrum der alkoholischen  
Magdalarothlösung. — 5 cm Schicht.

Verdünnung	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$
Halbschatten	123—125	120—123	118—120	111—117	?—108

Es bedarf keiner weiteren Erörterung mehr, dass hiernach die Verdünnung  $\frac{1}{4}$  als die kritische Lösung, und die Spectralstelle 118, d. h.  $C55D$ , als untere Grenze des Absorptionsbezirktes der Einzelmoleculé zu betrachten ist, und ich bemerke deshalb nur noch, dass auch das Zusammenschrumpfen des in die Flüssigkeit eindringenden Lichtkeils sich ebenfalls zuerst in der Verdünnung  $\frac{1}{2}$  bemerkbar macht. Dagegen fängt das Fluorescenzvermögen nach meinen Messungen schon von der Lösung  $\frac{1}{16}$  an abzunehmen, sodass mithin beim Magdalaroth die schon vor der eigentlichen Gruppenbildung auftretende Herabminderung des Fluorescenzvermögens noch viel mehr ausgesprochen ist als beim Fluoresceïn. In der That dürfte auch in sehr vielen anderen Fällen, wo in den stärkeren Concentrationen fluorescirender Lösungen eine Herabminderung des Fluorescenzvermögens zu constatiren ist, dieselbe meistens lediglich durch die zu dichte Zusammenlagerung des fluorescirenden Einzelmoleculé hervorgerufen werden, da das Auftreten von wirklichen Moleculgruppen in Lösungen, wie die Untersuchung sehr vieler Farbstofflösungen gezeigt hat, keineswegs zu den Häufigkeiten zu gehören scheint.

Indessen ist es mir doch gelungen, vorläufig zwei nicht fluorescirende Substanzen aufzufinden, deren Absorptionsspectrum die Möglichkeit eines doppelten Molecularzustandes in ihren Lösungen aufweist, und diese Beispiele sind um so interessanter, als für beide auch schon von anderer Seite her dahin gehende Beobachtungen gemacht worden sind. Der erste dieser Körper ist das Eisenchlorid, für dessen verschiedene Verdünnungen mit Wasser erst kürzlich Fitzpatrick aus seinen Bestimmungen ihres electrischen Leitungsvermögens eine verschiedene Constitution des Substrates vermuthete.<sup>1)</sup>

1) Fitzpatrick, Phil. Mag. (5) 24. p. 386. 1887.



Tabelle III.

Lage des Halbschattens im Absorptionsspectrum der wässerigen  
Lösungen des Eisenchlorids. — 12 cm Schicht.

Verdünnung	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$
Halbschatten	145—164,5	140—162,5	132—162	95—147,8	alles dunkel

Während hiernach die Grenze des Kernschattens (fettgedruckte Zahlen) bis zur Verdünnung  $\frac{1}{4}$  nur sehr langsam weiter rückt, springt sie in der Concentration  $\frac{1}{2}$  plötzlich um ein ganz beträchtliches Stück vor: ein deutlicher Beweis für das Vorhandensein eines neuen absorbirenden Einflusses.

Noch interessanter als das Eisenchlorid ist das Kupferchlorid, für dessen Lösungen bereits Rüdorff durch seine bekannten Gefrierversuche eine zweifache Moleculargruppierung aufweist.<sup>1)</sup> Sein Absorptionsspectrum zeigt zwei dunkle Streifen, von denen der eine das rothe, der andere das violette Ende des Spectrums umfasst, sodass ich, um auch die Aenderungen des letzteren Streifens beobachten zu können, in Ermangelung eines Spectroskops mit fluorescirendem Ocular, das Sonnenspectrum mit seinen Fraunhofer'schen Linien objectiv auf einem weissen Schirm entwarf, den ultravioletten Theil desselben jedoch mittelst einer passend gewählten Aesculinlösung auffing.<sup>2)</sup>

Tabelle IV.

Lage der Halbschatten im Absorptionsspectrum der Kupferchloridlösungen.  
5 cm Schicht.

Verdünnung	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$
Halbschatten d. rothen Seite	656—648	639—623	623—589	589—575	575—552
Halbschatten d. violett. Seite	382—358	382—373	390—388	429—421	470—457

Die Zahlen dieser Tabelle geben nicht wie früher Scalentheile, sondern direct die Wellenlängen der betreffenden Strahlen.

1) Rüdorff, Pogg. Ann. 116. p. 70. 1862.

2) Die zu solchen Zwecken geeignetste Concentration ist, wie leicht verständlich, die kritische Lösung.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.

len in den gebräuchlichen Einheiten an; und es stellen hier die fettgedruckten Ziffern genau wie in der vorigen Tabelle die Grenzen der beiden Kernschatten dar. Diese springen also nach Tabelle IV beim Uebergang von der Verdünnung  $\frac{1}{4}$  zu der Lösung  $\frac{1}{2}$  beide zugleich plötzlich um ein beträchtliches Stück vor; ob wir es aber bei diesem Uebergang, wie Rüdorff meint, mit der Bildung eines neuen Hydrates oder auch nur mit einer einfachen Zusammenlagerung der Einzelmolecüle zu Gruppen zu thun haben, darüber sagt das Absorptionsspectrum nichts, und ich gehe deshalb hierauf auch nicht weiter ein.

Für das Fluoresceïn, das Magdalaroth und die Eosine dagegen gibt es ausser den bereits erwähnten Absorptions- und Fluorescenzerscheinungen noch einige andere Phänomene, welche fast noch mehr als diese zu der Annahme von Ganz- und Halblösungen in dem oben definirten Sinne hindrängen, welche vor allen Dingen aber für diese fluorescirenden Substanzen die für viele andere derselben gültige Erklärung ausschliessen, dass die Abnahme des Fluorescenzvermögens in ihren concentrirten Lösungen blos durch die allzu dichte Lagerung der gelösten Theilchen verursacht wird.

*Es lässt sich nämlich das Fluorescenzvermögen der Halblösungen des Fluoresceïns und Eosins auch durch blosses Erhitzen derselben verstärken.*

Diese wichtige Thatsache könnte nach der zuletzt erwähnten Ansicht nur dadurch erklärt werden, dass durch die Wärmezufuhr entweder der Abstand der kleinsten Theilchen vergrössert oder die Beweglichkeit derselben erhöht oder beides zugleich bewirkt wird. Dasselbe müsste aber offenbar auch für die Halblösungen aller übrigen fluorescirenden Substanzen gelten; indessen zeigt sich bei der concentrirten alkoholischen Magdalarothlösung, dass die Wärme keine Erhöhung, sondern eher eine Erniedrigung des Fluorescenzvermögens hervorruft, sodass mithin die obige Theorie nicht ausreicht. Berücksichtigt man dagegen andererseits, dass die Wärme die Lösungsfähigkeit des Wassers für Fluoresceïn und Eosin erhöht, die des Alkohols für Magdalaroth jedoch erniedrigt — wie z. B. daraus folgt, dass eine kaltesättigte Lösung beim Kochen erhebliche Mengen absetzt —, so sind die obigen, sich scheinbar widersprechenden Er-

scheinungen auf eine höchst einfache Weise erklärt. Auch die bekannte Thatsache, dass eine heisse, wässerige Lösung des Magdalaroths fluorescirt, eine kalte dagegen wenig oder garnicht, ist demnach einfach so zu verstehen, dass heisses Wasser die Molecülgruppen jener Substanz aufzulösen vermag, kaltes aber nicht.

Fast noch handgreiflicher als durch diese Vorgänge wird endlich die Existenz von Molecülgruppen und Einzelmoleculen in Lösungen noch durch die folgende Reihe von Erscheinungen dargethan.

Baeyer macht die Angabe, dass die concentrirten Lösungen des Fluoresceins mit Säuren einen Niederschlag geben, die dünneren dagegen nicht.<sup>1)</sup> Es lag nahe, einen Zusammenhang dieser Erscheinungen mit der doppelten Moleculargruppirung jenes Stoffes in seinen verschiedenen Concentrationen zu vermuthen; und in der That bestätigte sich diese Vermuthung dadurch, dass sämmtliche Halblösungen auf Zusatz von Säure sofort einen starken Niederschlag gaben, die vollkommenen Lösungen hingegen dabei völlig klar blieben. Beim Magdalaroth zeigen sich auf Zusatz von Eisenchloridlösung ähnliche Erscheinungen; indessen gehe ich hier nur auf die beim Fluorescein beobachteten Vorgänge näher ein.

Das fluoresceinsaure Ammonium — dieses steht ja hier in Frage — gibt beim Zusetzen einer starken Säure sein Ammoniak sofort an diese letztere ab und bildet demnach wieder die Fluoresceinsäure selbst, welche in Wasser nur sehr wenig löslich ist. Die in den Halblösungen vorhandenen Molecülgruppen werden mithin nach der Umsetzung in Säure sofort ausfallen, die in den vollkommenen Lösungen befindlichen Einzelmoleculé hingegen, da sie ja schon gelöst sind, sich auch noch nach ihrer chemischen Veränderung verhältnissmässig leicht gelöst erhalten. In den concentrirteren der vollkommenen Lösungen allerdings ist dies für die Gesammtheit der Einzelmoleculé nur auf kure Zeit möglich; und nach Verlauf einiger Stunden hat sich in ihnen ein grosser Theil dieser Säureeinzelmoleculé zu fester Substanz zusammengefunden, und zwar unter Bildung von hellgelben, durchsichtigen Krystall-

1) Baeyer, Lieb. Ann. 183. p. 7. 1876.

nadeln, während der Niederschlag aus den Halblösungen sich als eine undurchsichtige, körnige und rothbraune Masse (Fluoresceinpulver) erweist. Filtrirt man aber eine Halblösung sofort nach der Bildung dieses Niederschlages durch und lässt das Filtrat stehen, so bilden sich auch darin nach Verlauf mehrerer Stunden wieder dieselben Krystallnadeln wie in den vollkommenen Lösungen, und dieselben stammen ohne Zweifel von den Einzelmoleculen her, die sich ja, wie wir aus den Fluorescenzerscheinungen wissen, zugleich mit den Moleculgruppen in der Halblösung befunden haben. Es gewinnt somit den Anschein, als ob nur Einzelmoleculë krystallisationsfähig sind, und, der Farbe und Durchsichtigkeit der Krystalle nach zu urtheilen, erstreckt sich selbst in diesem festen Zustande die Absorption dieser Moleculë nicht über ihren Absorptionsbezirk im gelösten Zustande hinaus, während in dem aus den Halblösungen gewonnenen, pulverförmigen Niederschlage das sämmtliche eindringende Licht zurückgehalten wird, und nur ein kleiner Theil desselben, welcher zumeist den weniger brechbaren Strahlen angehört, von den oberflächlichen Schichten aus unregelmässig reflectirt wird.

Hamburg, phys. Staatslaborat., im September 1888.

#### XIV. Ueber Oberflächenschichten. I. Theil; von P. Drude.

(Aus den Gött. Nachr., vom 14. Juli 1888, für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

Die Jamin'sche Entdeckung, dass durchsichtige Medien in der Nähe der Polarisationswinkel linear polarisirtes Licht elliptisch polarisirt reflectiren, steht in Widerspruch mit den Lichttheorien von Fresnel, Neumann und Voigt. Während in neuerer Zeit Hr. Wernicke<sup>1)</sup> diesen Umstand als einen Beweis gegen die Gültigkeit jener Theorien angesehen

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 25. p. 302. 1885; 30. p. 452. 1887.

hat, hat Hr. Voigt<sup>1)</sup> die Erklärung der elliptischen Polarisation in der Wirkung von Oberflächenschichten gesehen, sowohl von natürlichen, wie bei Flüssigkeiten, als von natürlichen und künstlichen, welche letztere bei festen Körpern durch das Poliren hervorgerufen werden.

Ich theile im Folgenden auf Veranlassung des Hrn. Prof. Voigt angestellte Beobachtungen mit, welche, wie ich glaube, zur Bestärkung der Voigt'schen Erklärung dienen und die Existenz und mögliche Beseitigung von Oberflächenschichten betreffen.

Die Beobachtungen sind an durchsichtigen und an absorbirenden Medien angestellt, und zwar dienten natürliche Spaltungsflächen in frischem Zustande und nach verschiedener Behandlung als reflectirende Spiegel.

#### I. Durchsichtige Media.

Die Beobachtungsmethode war im wesentlichen dieselbe, wie ich sie beim Antimonglanz angewandt und bei Mittheilung<sup>2)</sup> jener Beobachtungen beschrieben habe. Ich unterlasse daher, hier näher darauf einzugehen. Aenderungen sind nur im Folgenden eingetreten:

Die Stellungen des Compensators, welche der relativen Verzögerung  $0, \pm 2\pi$  entsprechen, haben sich gegen die früheren<sup>3)</sup> Werthe um 0,06; 0,07; 0,09 Schraubenumgänge verschoben, sodass die jetzigen Werthe betragen:

18,16; 36,06; 53,84.

Die mittelste Zahl entspricht der Verzögerung Null. Der Verschiedenheit der Ganghöhe der Messschraube des Compensators<sup>4)</sup> ist durch die Annahme Rechnung getragen, dass sich die Ganghöhe von 18,16 bis 53,84 linear ändern solle. In der Nähe des Nullpunktes wird so die Verzögerung in Bogenmaass gegeben durch:

$$\Delta = \frac{2\pi}{17,84} (C - 36,06),$$

wenn  $C$  die vom Compensator gezeigte Zahl ist.

1) W. Voigt, Wied. Ann, **31**. p. 326. 1887.

2) P. Drude, Wied. Ann. **34**. p. 489. 1888.

3) l. c. p. 494.

4) l. c. p. 495.

Die Lage der Nullpunkte der Nicols war dieselbe wie früher.<sup>1)</sup>

Da in der Nähe des Polarisationswinkels beobachtet wurde, wo nur sehr wenig Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirt wird, so wurde nicht dem Polarisator das Azimuth  $45^\circ$  gegen die Einfallsebene gegeben, und danach Compensator und Analysator auf grösste Dunkelheit eingestellt, sondern es wurde der Analysator auf  $45^\circ$  gegen die Einfallsebene gerichtet und mit Compensator und Polarisator gemessen. Denn die Messungen mit dem Compensator fallen am genauesten aus, wenn gleichviel Licht parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ihn durchsetzt, da diese Richtungen seinen Hauptschwingungsrichtungen parallel sind. Das Azimuth des Polarisators gegen die Einfallsebene ist in diesem Falle das Complement des Azimuths  $\psi$  der wiederhergestellten Polarisation des reflectirten Lichtes von unter  $45^\circ$  polarisirtem einfallenden Lichte. — Der Vortheil dieser Anordnung ist ein bedeutender gegenüber der früheren, wenigstens bei durchsichtigen Medien.

Da die Verzögerungen stets sehr klein waren, und es sich um die grösste Helligkeit des einfallenden Lichtes handelte, weil es davon abhing, wie nahe am Polarisationswinkel man beobachten konnte, so ist mit Sonnenlicht beleuchtet. Es erschien in dem reflectirten Oeffnungsbilde des Collimators ein völlig schwarzer Streifen, der auf der einen Seite roth, auf der anderen blau gesäumt war. Durch Einstellung dieses schwarzen Streifens auf das Fadenkreuz im Fernrohr waren sehr genaue Messungen möglich. — Ich habe zwar auch einige Beobachtungen bei Natronlicht im Knallgasgebläse gemacht, die geringere Helligkeit erlaubte aber nur, bei Einfallswinkeln, die sich auf  $2^\circ$  dem Polarisationswinkel näherten, zu beobachten. Die so erhaltenen Werthe dienten nur, um die Identität der Resultate, die sich bei homogenem und weissem Lichte ergaben, festzustellen.

Es seien  $R_s$  und  $R_p$  die Componenten des reflectirten Lichtes, welches senkrecht, resp. parallel zur Einfallsebene polarisirt ist,  $A$  die relative Verzögerung,  $n$  der Brechungs-

1) l. c. p. 491.

index,  $\varphi$  der Einfallswinkel. Die genannten Lichttheorien verlangen nun: 1) dass  $\Delta$  stets Null sei, 2) dass  $R_s$  für einen gewissen Einfallswinkel  $\varphi$  durch Null hindurchgehe, 3) dass  $\tan \varphi = n$  sei. Rechnet man  $R_s$  stets positiv, so muss nach der Theorie  $\Delta$  für den Einfallswinkel  $\varphi$  von 0 auf  $\pi$  springen. Dieser Sprung hat aber nicht eine wirkliche Unstetigkeit in der Natur des reflectirten Lichtes zur Folge, da er bei der Intensität Null stattfindet.

In allen soeben angeführten drei Beziehungen sind Abweichungen beobachtet. Die Wernicke'sche Beobachtungsmethode gestattet, den ersten und letzten Punkt zu prüfen, die hier angewandte auch den zweiten, da das Verhältniss  $R_s/R_p = \tan \psi$  direct gemessen wird. Dies hat deshalb Interesse, weil, wenn  $\psi$  nie verschwindet, mit Nothwendigkeit elliptische Reflexion eintreten muss, da dann aus Stetigkeitsrücksichten der Uebergang von  $\Delta$  von 0 auf  $\pi$  durch dazwischen liegende Werthe erfolgen muss.

Ein Verschwinden von  $\psi$  macht das Fehlen elliptischer Reflexion sehr wahrscheinlich, denn alle Lichttheorien, auch die Cauchy'sche, erfordern, dass bei elliptischer Reflexion das Minimum von  $\psi$  sich stets von Null um einen Werth unterscheide, der von derselben Grössenordnung ist, wie die Ellipticität. Auch die Vorstellung einer Oberflächenschicht ergiebt, dass, wenn  $\psi$  zu Null wird, dieselbe keine elliptische Reflexion bewirken kann.

Immerhin ist das Verschwinden von  $\psi$ , schon allein weil es nicht sehr genau zu messen ist, noch nicht ein hinreichender Beweis für Fehlen der elliptischen Reflexion, derselbe ist vielmehr aus den Beobachtungen über die Verzögerung  $\Delta$  zu entnehmen. — Aus dem Vorstehenden erhellt indess, dass der Beweis fehlender elliptischer Reflexion sich nicht für den Polarisationswinkel selbst erbringen lässt, während dies für den Beweis der Existenz derselben möglich ist. Der Beweis für das Fehlen derselben ist um so strenger geführt, je näher die Grenzen der Einfallswinkel, innerhalb deren  $\Delta$  von 0 auf  $\pi$  wächst, sich an den Polarisationswinkel selbst heranziehen lassen.

Es wurde nicht in allen acht möglichen Stellungen der



Nicols<sup>1)</sup> beobachtet, sondern nur in zwei zu der Einfallsebene symmetrischen. Infolge des ausgezeichneten Planparallelismus der Nicols genügte dies, um richtige Werthe für  $\psi$  und  $A$  zu erhalten, wie ich an den Beobachtungen am Antimonglanz gezeigt habe (l. c. p. 501). Bei zwei zur Einfallsebene symmetrischen Stellungen zu beobachten war nöthig, um einen eventuellen Fehler, der durch falsche Orientirung des Compensators hervorgebracht sein könnte, und der bei durchsichtigen Medien einen bedeutenden Einfluss hat, zu eliminieren. Die richtige Orientirung des Compensators geschah nach der früher beschriebenen<sup>2)</sup> Methode; die Stellung wurde durch feine mit dem Diamant in die Messingfassungen des Compensators und Fernrohrs eingekratzte Striche markirt, sodass auch nach Abnahme des Compensators derselbe stets so gut wieder orientirt werden konnte, dass die beiden in symmetrischen Lagen zur Einfallsebene erhaltenen Werthe von  $\psi$  und  $A$  kaum differirten. Die in den Tabellen angegebenen Zahlen sind die Mittelwerthe aus mehreren Einstellungen in beiden Lagen.

Zunächst wurde an Spaltflächen beobachtet, welche aus einem klaren Steinsalzwürfel von circa 3 cm Seitenlänge hergestellt waren. Der Brechungsexponent fand sich mit Hülfe des Totalreflectometers zu:

$$n = 1,5437$$

und daraus der Polarisationswinkel  $\bar{\varphi}$  zu:

$$\bar{\varphi} = 57^{\circ}3'52''.$$

Die folgende Tabelle giebt die an zwei Flächen I und II erhaltenen Resultate. Die Justirung auf dem Spectrometer geschah dadurch möglichst schnell, dass die Flächen gegen einen auf dem Tischchen des Spectrometers befestigten Rahmen angedrückt wurden, der mit Hülfe einer Glasplatte orientirt war.  $\lambda$  ist in Wellenlängen angegeben.

1) P. Drude l. c. p. 493.

2) l. c. p. 492.



Tabelle I.

Platte	$\varphi$	$\Delta$	$\psi$	Zeit n. d. Spaltung
I	$\varphi - \frac{1}{2}^\circ$	0,5 — 0,0112	44'	$\frac{1}{2}$ Minute
		0,5 — 0,0286	—	$\frac{1}{2}$ Stunde
	$\varphi + \frac{1}{2}^\circ$	0,0145	42'	2 Minuten
II	$\varphi + \frac{1}{2}^\circ$	0,0095	47'	$\frac{1}{2}$ Minute
	$\varphi$	—	2'	2 Minuten

Der wahrscheinliche Fehler ist für  $\Delta$  höchstens zwei Trommeltheile, d. h. 0,001  $\lambda$ , für  $\psi$  ist er verhältnissmässig gross, da auf  $\psi$  nicht so oft eingestellt wurde, er mag etwa 5' betragen.

Für Einfallswinkel, die sich um mehr als  $2^\circ$  vom Polarisationswinkel entfernen, stand bei frischen Flächen der Compensator stets um höchstens vier Trommeltheile vom Nullpunkt entfernt, und zwar ohne ausgesprochenen Sinn, sodass überhaupt keine Verzögerung constatirt werden konnte.

Näher als auf  $\frac{1}{2}^\circ$  konnte ich bei den Beobachtungen für  $\Delta$  nicht den Einfallswinkel sich dem Polarisationswinkel nähern lassen, da dann wegen der Kleinheit von  $\psi$  der Compensator zu ungenau einzustellen war. Schon bei  $\varphi = \varphi \pm \frac{1}{2}^\circ$  beträgt das Verhältniss der Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes zu der des in derselben polarisirten 0,0<sub>3</sub>15.

Die Steinsalzplatten waren so dick, dass das eventuell von der Rückfläche reflectirte Bild abgeblendet wurde, da sonst keine völlige Dunkelheit eintrat.

Dass etwa irgend eine Täuschung bei den Beobachtungen vorliegen konnte, ist dadurch ausgeschlossen, dass bei dem Ersetzen der Steinsalzplatte durch eine Glasfläche der Compensator von seiner Stellung (z. B. 36,26) um drei Schraubenumdrehungen (auf 39,3) gedreht werden musste, um den schwarzen Streifen im Gesichtsfelde wieder zu erzeugen.

Aus den Beobachtungen folgt, dass  $\psi$  bei frischen Steinsalzplatten verschwindet ( $2'$  überschreitet nicht den Beobachtungsfehler), und zwar für einen Einfallswinkel  $\varphi$ , der durch die Beziehung  $\operatorname{tg} \varphi = n$  gegeben wird, während eine wenn auch sehr kleine, aber noch merkliche Ellipticität con-

statirt ist, jedoch für Einfallswinkel, die sehr dicht am Polarisationswinkel liegen, sodass die Grenzen derselben, innerhalb deren  $\Delta$  von 0 auf  $\frac{1}{2}\lambda$  wächst, hier etwas über  $1^\circ$  betragen.

Berücksichtigt man indess das schnelle Wachsthum von  $\Delta$ , dass schon nach zwei Minuten wesentlich grösser ist und nach einer halben Stunde sich verdoppelt hat, so kann man wohl annehmen, dass bei ganz frischen Spaltflächen der Winkelbereich, innerhalb dessen  $\Delta$  von 0 auf  $\frac{1}{2}\lambda$  wächst, noch kleiner wird, sodass überhaupt keine merkliche elliptische Reflexion stattfindet.

Wäre es möglich gewesen, für Einfallswinkel zu beobachten, die sich dem Polarisationswinkel um mehr als  $\frac{1}{2}^\circ$  näherten, so wäre natürlich eine grössere Ellipticität beobachtet, da die Werthe von  $\Delta$  zwischen den hier angeführten liegen müssen. — Bei der Beurtheilung der Grösse der elliptischen Reflexion eines durchsichtigen Mediums handelt es sich aber nicht nur um die Grösse der Verzögerung, sondern auch um den Einfallswinkel, bei dem sie beobachtet ist. In der Wernicke'schen<sup>1)</sup> Formel:

$$\operatorname{tg} \Delta = x \operatorname{tg}(\varphi \pm \varphi'),$$

wo  $\varphi$  den Einfalls-,  $\varphi'$  den Brechungswinkel bedeutet, bietet daher  $x$  ein gutes Maass für die Grösse der elliptischen Reflexion.

Legt man die  $\frac{1}{2}$  Minute nach der Spaltung gewonnenen Zahlen für Steinsalz zu Grunde, so wird:

$$\text{für I } x = 0,0,87$$

$$\text{„ II } x = 0,0,74,$$

d. h. etwa  $\frac{1}{20}$  des für Glas erhaltenen Werthes. Dieselbe Verzögerung, wie sie hier für Steinsalz bei einer Entfernung von  $\frac{1}{2}^\circ$  vom Polarisationswinkel beobachtet ist, würde man bei Glas bei einer Entfernung von  $10^\circ$  vom Polarisationswinkel beobachten. Der Winkelbereich der elliptischen Reflexion ist also bei Steinsalz als der zwanzigste Theil von dem des Glases beobachtet.

Auch der Werth von  $\psi$  bietet Anlass zur Vergleichung mit der Theorie, obwohl stets auch bei anderen durchsich-

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 30. p. 457. 1887.

tigen Medien weniger Abweichung bei  $\psi$  beobachtet ist, als bei  $\Delta$ . Setzt man:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varepsilon,$$

wo  $\varepsilon$  eine kleine Grösse sein soll, deren Quadrat zu vernachlässigen ist, so folgt aus den Reflexionsformeln der Lichttheorien nach einiger Rechnung:

$$\psi = \varepsilon \frac{(1 + n^2)^2}{2n^3}.$$

Für Steinsalz wird der Factor von  $\varepsilon$  zu 1,55. Für  $\varepsilon = 1/2^0$  ist  $\psi$  beobachtet zu  $44'$ , damit stimmt der nach obiger Formel berechnete Wert  $\psi = 47'$  völlig überein.

Nach allem kann man daher wohl mit Recht behaupten, dass frische Spaltungsflächen von Steinsalz hinsichtlich der Reflexion des Lichtes sich den genannten Theorien gemäss verhält.

Da sich ergab, dass die Verzögerung mit der Zeit wächst, so habe ich auch einige mehrere Tage alte Spaltungsflächen untersucht. Dieselben wurden in einem durch Schwefelsäure getrockneten Raume aufbewahrt, und nur zu den Beobachtungen daraus entfernt, da sonst infolge der hygroscopischen Eigenschaft des Minerals die Flächen bald schlecht reflectiren. Folgende Tabelle enthält die Resultate, welche an zwei Platten (III und IV) gewonnen sind. III ist ein Tag, IV drei Tage nach der Spaltung untersucht.

Tabelle II.

Platte	$\varphi$	$\Delta$	$\psi$ (beob.)	$\psi$ (berechn.)
III	$\varphi - 2^0$	0,5—0,005	—	$3^0 \ 6'$
	$\varphi - 1^0$	0,5—0,009	$1^0 \ 33'$	$1^0 \ 33'$
	$\varphi - \frac{1}{2}^0$	0,5—0,020	$50'$	$46'$
	$\varphi$	—	$4'$	$0'$
	$\varphi + \frac{1}{2}^0$	0,022	$47'$	$46'$
	$\varphi + 1^0$	0,010	$1^0 \ 35'$	$1^0 \ 33'$

1) Aus dieser Formel folgt, dass die hier gewählte Beobachtungsmethode eine um so grössere Annäherung an den Polarisationswinkel gestattet, je grösser der Factor von  $\varepsilon$  ist. Derselbe wird für  $n = \sqrt{3} = 1,73$  zu einem Minimum. Wenn  $n$  sich der Einheit nähert, so wird überhaupt zu wenig Licht reflectirt. Daher werden Körper mit möglichst hohen Brechungsexponenten für die Beobachtungen am günstigsten sein. Die Brechungsexponenten der meisten festen Körper mit guter Spaltbarkeit liegen ungünstig.

Platte	$\varphi$	$\Delta$	$\psi$ (beob.)	$\psi$ (berechn.)
IV	$\varphi - 3^\circ$	0,5—0,001	4° 40'	4° 39'
	$\varphi - 2^\circ$	0,5—0,002	3° 10'	3° 6'
	$\varphi - 1^\circ$	0,5—0,008	1° 34'	1° 33'
	$\varphi$	—	5'	0'
	$\varphi + 1^\circ$	0,004	1° 36'	1° 33'
	$\varphi + 2^\circ$	0,001	3° 6'	3° 6'

Die Tabelle zeigt, dass selbst für alte Spaltflächen die Verzögerung stets sehr klein ist, zufällig ist sie sogar an der älteren Fläche IV kleiner als bei III, was damit zusammenhängen kann, dass IV weniger lange in nicht getrockneter Luft bei der Beobachtung gestanden hat. Es liegt ja nahe, anzunehmen, dass die Verzögerung hier durch eine Wasserschicht entsteht. Die Uebereinstimmung von  $\psi$  mit den berechneten Werthen ist sehr genau, was auch, wenn man die Vorstellung einer gebildeten Wasserschicht festhält, erklärlich ist, da der Brechungsexponent von Wasser nicht wesentlich von dem des Steinsalzes abweicht.

Um die Richtigkeit der Erklärung der elliptischen Polarisation durch die Wirkung einer Oberflächenschicht noch direct zu beweisen, wurden die Steinsalzplatten untersucht, nachdem sie auf neuem Putzleder oder Leinen einige Minuten unter etwas Druck mit der Hand gerieben waren. Folgendes sind die Resultate:

$\Delta$	
$\varphi = \varphi + \frac{1}{2}^\circ$	Ursprünglicher Werth: 0,022 $\lambda$
	Auf Leder gerieben: 0,053
	Dann auf Leinen gerieben: 0,067
	„ „ Leder gerieben: 0,058
$\varphi = \varphi - 1^\circ$	Ursprünglicher Werth: (0,5—0,013) $\lambda$
	Auf Leinen gerieben: (0,5—0,083)
	Dann auf Leder gerieben: (0,5—0,034)
	Ursprünglicher Werth: (0,5—0,012) $\lambda$
	Auf Leder gerieben: (0,5—0,021)
	Dann auf Leinen gerieben: (0,5—0,073)

$\psi$  zeigte sich durch das Poliren gar nicht beeinflusst, so ergab sich für  $\varphi = \varphi$ :

Ursprünglicher Werth:  $\psi = 6'$

- Mit Leinen gerieben:  $5'$

Mit Leder gerieben:  $0'$ .

Aus der Thatsache, dass für Einfallswinkel, die kleiner als  $\overline{\varphi}$  sind, die Verzögerung durch das Poliren verkleinert, dagegen für grössere Einfallswinkel als  $\overline{\varphi}$  vergrössert wird, folgt, dass der Haupteinfallswinkel derselbe geblieben ist. Der Einfluss des Polirens auf  $\Delta$  ist unverkennbar; über die sich bildende Veränderung kann man sich zur Erklärung der elliptischen Polarisation zwei Vorstellungen machen:

1) das Mineral wird mit einer dem Putzmittel eigenthümlichen Schicht überzogen, die elliptische Polarisation kommt zu Stande durch Reflexion an der Vorder- und Rückfläche derselben;

2) der Vorgang der Reflexion findet auch bei der polirten Fläche nur an einer Grenze statt, die Aenderung gegen das Verhalten der unpolirten Fläche ist darin begründet, dass die optische Natur des Spiegels durch das Poliren eine andere geworden ist.

Auf die Entscheidung zwischen beiden Vorstellungen will ich nicht hier, sondern im zweiten (theoretischen) Theil der Arbeit eingehen, und hier nur bemerken, dass sich mit Nothwendigkeit die erstere Vorstellung ergibt, sodass es sich hier wirklich um eine durch Poliren hervorgerufene künstliche Oberflächenschicht handelt.

Ich werde an der geeigneten Stelle zeigen, dass der grosse Unterschied im Verhalten von  $\Delta$  und  $\psi$  bei Reflexion an einer polirten und an einer unpolirten Fläche auch theoretisch begründet ist.

Aus den mitgetheilten Beobachtungen geht hervor, dass die Veränderung, die das Reiben auf Leinen hervorbringt, stärker ist, als die durch Reiben auf Leder hervorgerufene. Man hätte eher das Umgekehrte erwarten sollen, da man frisch gewaschenes Leinen für reiner halten sollte als Leder. Die hier gemachte Beobachtung steht aber völlig im Einklang mit der am Bleiglanz gemachten und unten mitgetheilten.

Es ist durch die Versuche gezeigt, wie enorm empfindlich frische Spaltflächen der Berührung mit anderen

Körpern gegenüber sind, sodass schon die sogenannte Reinigung mit Leder oder Leinen die Flächen so verunreinigt, dass sie auf keine Weise in den natürlichen Zustand zurückzubringen sind. Dass daher richtig polirte Körper eine merkliche elliptische Polarisation zeigen, ist durchaus erklärlich.

Ausser Steinsalz sind noch andere durchsichtige Medien mit guten Spaltungsflächen untersucht. An Flussspath und Glimmer wurden keine sicheren Resultate erhalten, weil theils die Flächen zu schlecht waren, theils die an der Hinterfläche reflectirten Bilder störten. Jedenfalls zeigte sich aber auch bei ihnen eine bedeutend kleinere elliptische Polarisation als an Glas. Beim Kalkspath<sup>1)</sup> war die am meisten vom Nullpunkt abweichende Stellung des Compensators 36,36, was einer Verzögerung von  $0,0168\lambda$  entspricht, beim Gyps vom Montmartre war sie noch weit kleiner.

Wenn es erlaubt ist, die an den angeführten Körpern erhaltenen Resultate auf alle durchsichtigen zu verallgemeinern, so folgt, *dass durchsichtige Medien an natürlichen Spaltungsflächen annähernd keine elliptische Polarisation bei Reflexion von linearpolarisirtem einfallenden Lichte zeigen und sich auch sonst der Theorie gemäss verhalten. Poliren mit einer fremden Substanz erzeugt eine Oberflächenschicht, welche elliptische Polarisation hervorruft.*

## II. Absorbirende Media.

Es sollte untersucht werden, welchen Einfluss die Politur auf absorbirende Medien hat und ob die durch dieselbe entstandene Oberflächenschicht durch irgend welche Mittel entfernt werden kann. Es wurde dazu der Bleiglanz benutzt, da er eine hinreichend gute Spaltbarkeit besitzt, um den natürlichen Zustand an den Spaltflächen beobachten zu können, und da er auch auf ihnen polirfähig ist. Um eine Vorstellung von der Wirkung der Politur zu bemerken, genügt es nicht, die Veränderung von  $\psi$  und  $\Delta$  zu con-

1) Die Beobachtungen sind früher angestellt, als mir die vor kurzem erschienene Abhandlung von Hrn. P. Volkmann, Wied. Ann. 35. p. 719. 1888 bekannt war, welcher den Kalkspath zu diesen Beobachtungen empfiehlt. Ich würde sonst mehr Daten angeben.

statiren, sondern es müssen auch die optischen Constanten berechnet werden, die ja das Hauptinteresse bieten. Da alle Beobachtungen über Metallreflexion an polirten Spiegeln gemacht sind, so wird man hierdurch wenigstens eine rohe Vorstellung über die Fehler der Constanten gewinnen, die bis jetzt für Metalle mitgetheilt sind.

Die neuesten Formeln<sup>1)</sup> zur Berechnung der Constanten nach der Voigt'schen Theorie sind zwar ziemlich einfach, indess erfordern sie, wenn man für mehrere Einfallswinkel beobachtet, was für die Genauigkeit sehr wünschenswerth ist, doch zeitraubende Rechnung. Ich habe daher die Formeln noch zu vereinfachen gesucht durch eine gewisse Vernachlässigung, die aber fast bei allen bis jetzt beobachteten absorbirenden Medien zulässig ist.

Vereinfachte Formeln für Metallreflexion. — In der citirten Arbeit habe ich  $\psi$  und  $\Delta$  als abhängig von  $\varphi$  und zwei Constanten  $\alpha$  und  $\alpha'$  dargestellt, welche direct in den Differentialgleichungen der Lichtbewegung<sup>2)</sup> als Coëfficienten vorkommen. Diese Constanten sind fast stets sehr klein, sodass man ihr Quadrat unbedenklich und sie selbst mit einer gewissen Näherung gegen 1 vernachlässigen kann.<sup>3)</sup> Von dieser Voraussetzung soll Gebrauch gemacht werden.

Für:  $\alpha + i\alpha' = \alpha, \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{wird}^4):$

$$(1) \quad \frac{\cos 2\psi}{1 - \sin 2\psi \cos \Delta} + i \frac{\sin 2\psi \sin \Delta}{1 - \sin 2\psi \cos \Delta} = \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \varphi}}.$$

Man erhält einen Grenzwert für  $\psi$  und  $\Delta$ , gültig für kleine Winkel  $\varphi$ , wenn man  $\alpha \sin^2 \varphi$  gegen 1 vernachlässigt.<sup>5)</sup> Setzt man nun:

1) W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 242. 1887. P. Drude, Wied. Ann. 32. p. 613. 1887.

2) P. Drude, l. c. p. 586.

3) Ich habe bei Berechnung der Beobachtungen für Antimonglanz (Wied. Ann. 34. p. 489. 1888) schon davon Gebrauch gemacht.

4) P. Drude, l. c. p. 615.

5) Wenn eine complexe Grösse gegen eine reelle zu vernachlässigen ist, so soll dies heissen, dass dies für den Modul der complexen Grösse zulässig sei.

$$(2) \quad \sin A \operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} Q, \quad \cos A \sin 2\psi = \cos P, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} P \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi = S,$$

so folgt nach einigen elementaren Rechnungen:

$$(3) \quad a = \frac{\cos 2Q}{S^2}, \quad a' = \frac{\sin 2Q}{S^2}.$$

Führt man den Brechungsexponenten  $n$  und den Absorptionscoefficienten  $x$  ein, die mit  $a$  und  $a'$  nach den Gleichungen<sup>1)</sup> zusammenhängen:

$$(4) \quad x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + a'^2}}{a'}, \quad \frac{1}{n^2} = 2x \cdot \frac{a^2 + a'^2}{a'}, \\ a = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{n^2(1 + x^2)}, \quad a' = \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{n^2(1 + x^2)},$$

so wird:

$$(5) \quad x = \operatorname{tg} Q, \quad n = S \cos Q, \quad nx = S \sin Q.$$

Diese Formeln sind sehr bequem für die Anwendung. Da  $Q = \arctg x$  und  $S$  Constanten sein müssen, so wird man für jeden Einfallswinkel  $\operatorname{tg} Q$  und  $S$  nach (2) aus den direct beobachteten Grössen  $\psi$  und  $A$  berechnen, aus allen erhaltenen Werthen das arithmetische Mittel nehmen und aus dem Mittelwerthe nach (3) und (5) die optischen Constanten berechnen. Dies Verfahren ist viel einfacher, als wenn  $a$  und  $a'$  für jeden Einfallswinkel berechnet werden, und dann das Mittel genommen wird, oder als wenn  $xn^2$  und  $(1 - x^2)n^2$  nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden.<sup>2)</sup>

Die Vernachlässigung von  $x \sin^2 \varphi$  gegen 1 bedingt eine gewisse Ungenauigkeit. Um über die Grösse derselben Gewissheit zu haben, ist noch ein anderer Grenzwert, gültig bei grossen Einfallswinkeln, für  $\psi$  und  $A$  zu bilden, der dadurch erhalten wird, dass  $\sin^2 \varphi = 1$  gesetzt wird, d. h. es ist dann:

$$(1a) \quad \frac{\cos 2\psi}{1 - \sin 2\psi \cos A} + i \frac{\sin 2\psi \sin A}{1 - \sin 2\psi \cos A} = \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - \alpha}}.$$

Hierin ist im Zähler für  $\alpha$  unbedenklich der bis jetzt erhaltene Näherungswert einzusetzen.

Man erhält so mit Vernachlässigung von  $\alpha^2$  nach einiger Rechnung:

1) P. Drude, l. c. p. 616.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 242. 1887.



$$(5_a) \quad x = \operatorname{tg} Q \left( 1 - \frac{1}{S^2} \right), \quad n = S \cos Q \left( 1 + \frac{1}{2S^2} \right),$$

$$nx = S \sin Q \left( 1 - \frac{1}{2S^2} \right).$$

Die beiden durch die Formeln 5 und 5<sub>a</sub> gegebenen Grenzwerthe mögen durch Indices 1 und 2 bezeichnet werden. Mit Hülfe der Grenzwerthe kann man einen genaueren Werth für  $x$  und  $n$  leicht berechnen (er möge ohne Index bezeichnet werden).  $x$  und  $n$  wird sich nämlich um so eher an  $x_1$  und  $n_1$  anschliessen, je kleiner die Einfallswinkel sind, bei denen  $\psi$  und  $\Delta$  beobachtet sind, dagegen an  $x_2$  und  $n_2$  bei grossen Einfallswinkeln, da es sich darum handelt, ob die in Formel (1) unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse  $\sin^2 \varphi$  mehr sich der 0 oder 1 nähert. Man findet daher einen genaueren Werth nach der Formel:

$$(5_b) \quad x = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{\sum \sin^2 \varphi}{N},$$

$$n = n_1 + (n_2 - n_1) \frac{\sum \sin^2 \varphi}{N}, \quad ^1)$$

wo  $N$  die Anzahl der Einfallswinkel bedeutet, bei denen beobachtet ist, und die Summe über alle die betreffenden Einfallswinkel zu erstrecken ist. Ich werde unten an einem numerischen Beispiele die Brauchbarkeit der Methode darthun.

Um die Beobachtungen mit den nach der Theorie gelieferten Werthen zu vergleichen, bedarf man der Berechnung von  $\psi$  und  $\Delta$  aus  $n$  und  $x$ . Hierzu dienen die leichtableitbaren Formeln. Setzt man:

$$\operatorname{tg} Q_1 = x$$

$$(6) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} P_1 = \frac{n \sqrt{1+x^2}}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} = \frac{n}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \cos Q},$$

so wird:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \Delta_1 = \operatorname{tg} P_1 \sin Q_1,$$

$$\cos 2 \psi_1 = \sin P_1 \cos Q_1.$$

1) Diese Formeln werden strenger dadurch begründet, dass mit Vernachlässigung von  $1/S^4$  ist:

$$x = \operatorname{tg} Q \left( 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{S^2} \right), \quad n = S \cos Q \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{S^2} \right),$$

$$n \sqrt{1+x^2} = S \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \frac{\cos 2Q}{S^2} \right).$$

Ferner für:

$$(6_a) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} Q_2 &= x \left( 1 + \frac{1}{n^2(1+x^2)} \right), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} P_2 &= \frac{n\sqrt{1+x^2}}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} \left( 1 - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{2n^2} \right), \end{aligned}$$

wird:

$$(7_a) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} A_2 &= \operatorname{tg} P_2 \sin Q_2, \\ \cos 2 \psi_2 &= \sin P_2 \cos Q_2. \end{aligned}$$

Hier bezeichnen wieder  $A_1, A_2, \psi_1, \psi_2$  Grenzwertthe, zwischen denen die wahren Werthe  $A, \psi$  liegen müssen, und die sich berechnen aus:

$$(7_b) \quad \begin{aligned} A &= A_1 + (A_2 - A_1) \sin^2 \varphi, \\ \psi &= \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1) \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Aus dem Haupteinfallswinkel  $\varphi$  und dem Hauptazimuth  $\bar{\psi}$  finden sich die Constanten aus:

$$(8) \quad x_1 = \operatorname{tg} 2 \bar{\psi}, \quad n_1 = \sin \bar{\varphi} \operatorname{tg} \bar{\varphi} \cos 2 \bar{\psi}, \quad n_1 x_1 = \sin \bar{\varphi} \operatorname{tg} \bar{\varphi} \sin 2 \bar{\psi},$$

$$(8_a) \quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= x_1 \left( 1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}}{\sin^2 \bar{\varphi}} \right), & n_2 &= n_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}}{\sin^2 \bar{\varphi}} \right), \\ n_2 x_2 &= n_1 x_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}}{\sin^2 \bar{\varphi}} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(8_b) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_1 (1 - \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}), & n &= n_1 (1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \bar{\varphi}), \\ nx &= n_1 x_1 (1 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}). \end{aligned} \right.$$

Umgekehrt berechnet sich Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth aus den Constanten nach:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \bar{\varphi}_1 &= \frac{1}{n \sqrt{1+x^2}}, & \operatorname{tg} 2 \bar{\psi}_1 &= x, \\ \cos \bar{\varphi}_2 &= \cos \bar{\varphi}_1 \left( 1 - \frac{1+3x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{2n^2} \right), & \operatorname{tg} 2 \bar{\psi}_2 &= x \left( 1 + \frac{1}{n^2(1+x^2)} \right). \end{aligned} \right.$$

$\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  analog wie in (7<sub>b</sub>)  $\psi$  und  $A$  aus  $\psi_1, \psi_2, A_1, A_2$ .

Beobachtet man die Reflexion statt an der Grenze Metall-Luft an der Grenze Metall-Flüssigkeit vom Brechungsindex  $n_0$ , so ist, um die dann gültigen Werthe für  $\psi$  und  $A$

1) Die Formel zeigt, wie das für durchsichtige Medien  $n = \operatorname{tg} \bar{\varphi}$  gültige Gesetz durch die Absorption modificirt wird.

2) Diese Formel steht im Einklang mit der Bemerkung des Herrn Voigt hinsichtlich der Durchsichtigkeit der Metalle, s. Wied. Ann. 26. p. 144. 1884.

— sie mögen mit  $\psi_0$  und  $\Delta_0$  bezeichnet werden —  $n/n_0$  an Stelle von  $n$  zu setzen.  $Q$  bleibt also ungeändert, dagegen ändert sich  $P$ . Es muss demnach sein:

$$(10) \quad \sin \Delta \operatorname{tg} 2\psi = \sin \Delta_0 \operatorname{tg} 2\psi_0, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} P = n_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} P_0,$$

$$\text{wo:} \quad \cos \Delta \sin 2\psi = \cos P, \quad \cos \Delta_0 \sin 2\psi_0 = \cos P_0 \quad \text{ist.}$$

Will man zu  $\psi$  und  $\Delta$  die zugehörigen  $\psi_0$ ,  $\Delta_0$  berechnen, so dienen dazu die Formeln:

$$\text{Für:} \quad \begin{aligned} \sin \Delta \operatorname{tg} 2\psi &= \operatorname{tg} Q, \\ \cos \Delta \sin 2\psi &= \cos P, \end{aligned}$$

$$(11) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} P}{n_0} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} P_0,$$

$$\text{wird:} \quad \begin{aligned} \cos 2\psi_0 &= \sin P_0 \cos Q, \\ \operatorname{tg} \Delta_0 &= \operatorname{tg} P_0 \sin Q. \end{aligned}$$

Hier braucht man keinen zweiten Grenzwert zu berechnen, denn es ist  $\frac{1}{2} \alpha \sin^2 \varphi (1 - n_0^2)$  gegen 1 vernachlässigt, und dies bedingt einen Fehler, der meist kleiner ist als 1 Proc.

Ich will die Brauchbarkeit der Formeln an einem numerischen Beispiele zeigen, dass für Bleiglanz gilt.

Aus den Beobachtungen für:

$$\varphi = 60^\circ, 70^\circ, 72^\circ, 74^\circ, 76^\circ, 77^\circ, 78^\circ$$

folgt, berechnet nach (5) und (5<sub>a</sub>):

$$z_1 = 0,4219, \quad n_1 = 4,209, \quad n_1 z_1 = 1,757,$$

$$z_2 = 0,3973, \quad n_2 = 4,310, \quad n_2 z_2 = 1,715.$$

Da  $\sum \sin^2 \varphi / N = 0,84$  ist, so folgt nach (5<sub>b</sub>):

$$x = 0,400, \quad n = 4,300, \quad nx = 1,719.$$

Dieselben Constanten sind nach den ursprünglichen<sup>1)</sup> Formeln berechnet, ohne irgend welche Vernachlässigung, zu:

$$x = 0,400, \quad n = 4,300, \quad nx = 1,719,$$

d. h. völlig übereinstimmend mit den Näherungswerten.

Die Anwendbarkeit der Formeln ist dadurch bedingt dass:

$$S^2 = n^2 (1 + x^2) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2}}$$

gross ist. Für Bleiglanz ist  $S^2 = 21,5$ , dies ist also schon als genügend gross anzusehen. Es ist eigenthümlich, dass bei

1) P. Drude, l. c. p. 615.

fast allen absorbirenden Medien  $S^2$  sich diesem Werthe nähert, sodass die Formeln fast stets anzuwenden sind. Die Medien mit kleinen Brechungsexponenten, wie z. B. Silber, haben nämlich starke Absorption  $\kappa$  und umgekehrt. Ich lasse hier die Werthe von  $S^2$  folgen für die Metalle, deren Constanten Hr. Voigt<sup>1)</sup> zusammengestellt hat.

	$n$	$\kappa$	$S^2$		$n$	$\kappa$	$S^2$
Spiegelmetall	1,47	2,5	15,7	Wismuth	1,17	2,5	9,95
Silber (gewalzt)	0,37	7,7	8,6	Zinn	1,15	2,9	12,9
„ (gegossen)	0,39	11,3	19,6	Eisen	2,25	1,4	15,3
„ (gewalzt)	0,40	11,3	20,6	Stahl	2,35	1,5	17,9
Gold	0,40	8,7	12,3	Aluminium	1,85	2,1	18,9
Quecksilber	1,65	3,5	35,6	Bleiglanz	4,30	0,4	21,5
Platin	1,3	3,0	16,9	Rothgiltigerz	3,12	0,55	12,8
Palladium	1,54	2,7	19,8	resp.			9,5
Kupfer	0,42	6,5	7,6	Antimonglanz	5,17	0,14	27,1
Zink	1,35	3,0	18,2	resp.	4,49	0,18	20,7
Blei	2,2	0,7	7,2				

Die Constanten für Bleiglanz sind den im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen entnommen, die für Rothgiltigerz habe ich aus Beobachtungen von Herrn Schenk<sup>2)</sup> berechnet, beim Antimonglanz habe ich sie früher<sup>3)</sup> bestimmt.

Die Zusammenstellung zeigt, dass, abgesehen von Kupfer, Blei und Wismuth, die Formeln für die Metalle anzuwenden sind, da  $S^2$  mindestens die Hälfte von dem Werth, welcher für Bleiglanz gültig ist, beträgt. Die Constanten werden höchstens auf 1–2% falsch bestimmt werden, was völlig ausreichend genau ist bei der Unsicherheit der Beobachtungen, welche durch Politur etc. beeinflusst werden.

Beobachtungen am Bleiglanz. — Die Beobachtungsmethode ist die alte. Da aber  $\eta$  für keinen Einfallswinkel sehr klein wird, ist das einfallende Licht unter 45° gegen die Einfallsebene polarisirt, und der Analysator wurde auf Dunkelheit gestellt. Die Beleuchtung geschah mit einer Sodaperle im Knallgasgebläse, da diese Helligkeit völlig genügte.

Die folgende Tabelle enthält das Resultat der Beobachtungen an zwei frischen Spaltflächen, welche aus einem

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 142. 1884.

2) E. Schenk, Wied. Ann. 15. p. 177. 1882.

3) P. Drude, Wied. Ann. 34. p. 489. 1888.

Bleiglanzwürfel von etwa 2 cm Seitenlänge abgespalten waren und ungefähr  $0,5 \times 0,5$  cm gross waren. Durch besondere Versuche wurde constatirt, dass sich  $\psi$  und  $\Delta$  mit der Zeit nicht ändert, die Flächen zeigten, wenn sie unberührt geblieben waren, noch nach Tagen dieselben Werthe.  $Q$  und  $S$  bedeuten die im früheren gebrauchten Bezeichnungen.

Tabelle III. Spaltflächen.

## 1. Fläche.

$q$	28° 56'	60° 8'	70° 8'	72° 8'	74° 8'
$\Delta$	$\pi - 2^\circ 50'$	$\pi - 14^\circ 42'$	$\pi - 33^\circ 12'$	$\pi - 41^\circ 36'$	$\pi - 51^\circ 42'$
$2\psi$	83 42	56 8	37 32	32 44	27 44
$\log \operatorname{tg} Q$	9,6510	9,5776	9,6239	9,6302	9,6155
$\log S$	0,6513	0,6598	0,6598	0,6564	0,6583

$q$	76° 8'	77° 8'	78° 8'	80° 8'	
$\Delta$	$\pi - 68^\circ 12'$	$\pi - 79^\circ 48'$	$86^\circ 0'$	$33^\circ 18'$	
$2\psi$	24 40	23 28	23 26	38 0	
$\log \operatorname{tg} Q$	9,6298	9,6307	9,6358	9,6324	
$\log S$	0,6626	0,6610	0,6560	0,5050	

Mittelwerth:  $\log \operatorname{tg} Q = 6,6252$ ,  $\log S = 0,6591$ ,  $n = 4,300$ ,  
 $z = 0,400$ ,  $nz = 1,719$ .

## 2. Fläche.

$q$	70° 8'	72° 8'	74° 8'	76° 8'
$\Delta$	$\pi - 31^\circ 48'$	$\pi - 41^\circ -'$	$\pi - 53^\circ -'$	$\pi - 73^\circ 15'$
$2\psi$	36 30	32 10	27 52	23 55
$\log \operatorname{tg} Q$	9,5910	9,6155	9,6255	9,6281
$\log S$	0,6573	0,6552	0,6549	0,6457

$q$	77° 8'	78° 8'	80° 8'	
$\Delta$	$\pi - 83^\circ 48'$	$76^\circ 36'$	$50^\circ 36'$	
$2\psi$	22 35	22 17	26 35	
$\log \operatorname{tg} Q$	9,6165	9,6006	9,5873	
$\log S$	0,6482	0,6299	0,6263	

Mittelwerth:  $\log \operatorname{tg} Q = 9,6092$ ,  $\log S = 0,6454$ ,  $n = 4,183$ ,  
 $z = 0,389$ ,  $nz = 1,629$ .

Die beiden Flächen geben etwas abweichende Resultate. Das aus der ersten Fläche gewonnene ist das wahrschein-

lichere, denn abgesehen davon, dass dort bei mehr Einfallswinkeln beobachtet ist, spiegelte auch die Fläche besser als die zweite, sodass der wahrscheinliche Beobachtungsfehler geringer ist. Ausserdem erscheint bei der zweiten Fläche eine systematische Veränderung von  $Q$  und  $S$ , indem z. B.  $Q$  mit wachsendem Einfallswinkel erst wächst und dann abnimmt. Selbst wenn man den sehr geringen Einfluss des Einfallswinkels berücksichtigen wollte, so müsste  $Q$  stetig wachsen. Dagegen zeigt die erste Fläche eine gute Constanz von  $Q$  und namentlich von  $S$ , sodass man, ohne  $\varphi$  und  $\Delta$  rückwärts zu berechnen, die Formeln durch die Beobachtung sehr gut bestätigt sieht.

Der grosse Werth des Brechungsindex ist bemerkenswerth. Er ist von derselben Ordnung, wie die des Antimonglanzes.

Die für  $\varphi = 70^\circ$  erhaltenen Werthe von  $\psi$  und  $\Delta$  sind bei sehr vielen Spaltflächen untersucht, weil für diesen Einfallswinkel später hauptsächlich die Aenderungen, welche die verschiedene Behandlung der Flächen hervorriefen, constatirt werden sollten. Es ergaben sich Stellungen des Compensators, welche zwischen  $37,63$  und  $37,71$  schwankten, d. h. eine Variation von  $\Delta$  von  $\pi - 31^\circ 42'$  bis zu  $\pi - 33^\circ 21'$  ergaben. Man ist somit berechtigt, die berechneten Werthe für  $n$  und  $\kappa$  als dem natürlichen Zustande entsprechend anzunehmen.

Sodann wurde eine Fläche untersucht, welche mit Pariser Roth und Wiener Kalk polirt war. Es war nicht eine der vorhin untersuchten Flächen selbst, da sie beim Beginn des Polirens entzwei brachen. Da aber alle aus dem Würfel gewonnenen Spaltstücke nahezu dieselben Werthe für  $\psi$  und  $\Delta$  ergaben, so gilt auch für die polirte Fläche als natürlichen Zustand der in Tabelle III mitgetheilte. Tabelle IV enthält die Resultate:

Tabelle IV. Polirte Fläche.

$\varphi$	60°	65°	70°	72°	74°
$A$	$\pi - 31^\circ 6'$	$\pi - 42^\circ 36'$	$\pi - 62^\circ 48'$	$\pi - 74^\circ 22'$	$\pi - 87^\circ 24'$
$2\psi$	52 15	44 20	36 59	34 47	33 58
$\log \operatorname{tg} Q$	9,8242	9,8404	9,8260	9,8253	9,8280
$\log S$	0,5369	0,5388	0,5381	0,5274	0,5381

  

$\varphi$	76°	77°	78°	80°	
$A$	$76^\circ 42'$	$69^\circ 6'$	$61^\circ 46'$	$47^\circ 52'$	
$2\psi$	35 29	36 2	38 10	42 37	
$\log \operatorname{tg} Q$	9,8412	9,8322	9,8404	9,8340	
$\log S$	0,5365	0,5379	0,5373	0,5404	

Mittelwerth:  $\log \operatorname{tg} Q = 9,8324$ ,  $\log S = 0,5368$ ,  $n = 2,96$ ,  
 $\alpha = 0,629$ ,  $n\alpha = 1,86$ .

Die Aenderung, welche die Politur auf die Constanten, namentlich auf  $n$ , hervorbringt, ist eine ganz bedeutende. Dass  $n$  wesentlich kleiner ausfällt, war von vornherein zu erwarten, da das Polirmittel sicher einen weit kleineren Brechungsexponenten besitzt, als der Bleiglanz. Auch die Vergrößerung von  $\alpha$  erklärt sich aus der Annahme, dass durch die Politur das Mineral mit einer Schicht überzogen ist, an deren Vorder- und Rückfläche das Licht reflectirt wird. Da dies schon an und für sich eine Verzögerung ergibt, und zwar in dem von Jamin positiv genannten Sinne, der auch an der frischen Spaltfläche beobachtet wird, so addirt sie sich zu der am Mineral selbst hervorgerufenen Verzögerung hinzu und bringt so eine Vergrößerung von  $\alpha$  hervor. — Durch eine beobachtete Abhängigkeit der  $Q$  und  $S$  vom Einfallswinkel wird diese Auffassung nicht unterstützt, denn Tabelle IV giebt für beide Grössen ziemlich constante Werthe an.

Die eben untersuchte Fläche wurde nun nach dem Wernicke'schen<sup>1)</sup> Verfahren mit Gelatine gereinigt, d. h. auf die mit Alkohol und Leinen geputzte Fläche wurde eine ziemlich concentrirte Gelatinelösung aufgegossen und die Platte erhitzt bis nahe zum Kochen der Lösung, um eventuell adhärende Gase zu entfernen. Dann wurde nach dem Ein-

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 30. p. 452. 1887.

trocknen der Gelatine dieselbe abgerissen und die Platte, ohne sie weiter zu berühren, untersucht. Die Gelatine hatte Bleiglanzstückchen mit abgerissen, was als ein Beweis des guten Haftens angesehen werden kann. Tabelle V giebt die Resultate:

Tabelle V. Fläche, mit Gelatine gereinigt.

$\varphi$	60°	65°	70°	72°	74°
$\Delta$	$\pi - 26^\circ 1'$	$\pi - 35^\circ 40'$	$\pi - 54^\circ 1'$	$\pi - 65^\circ 12'$	$\pi - 80^\circ -'$
$2\psi$	51 48	43 1	34 16	31 12	29 51
$\log \operatorname{tg} Q$	9,7462	9,7356	9,7413	9,7402	9,7540
$\log S$	0,5611	0,5630	0,5646	0,5562	0,5671

  

$\varphi$	76°	77°	78°	80°	
$\Delta$	$82^\circ 30'$	$73^\circ -'$	$63^\circ 30'$	$48^\circ 27'$	
$2\psi$	29 29	30 29	31 46	37 24	
$\log \operatorname{tg} Q$	9,7486	9,7505	9,7436	9,7575	
$\log S$	0,5668	0,5654	0,5640	0,5676	

Mittelwerth:  $\log \operatorname{tg} Q = 9,7464$ ,  $\log S = 0,5640$ ,  $n = 3,313$ ,  
 $\alpha = 0,520$ ,  $n\alpha = 1,724$ .

Durch die Reinigung nähern sich zwar  $n$  und  $\alpha$  den eigentlichen Werthen, aber sie erreichen sie noch lange nicht.<sup>1)</sup>  $Q$  und  $S$  sind auch hier constant. Zur Uebersicht stelle ich die erhaltenen Resultate zusammen.

	$n$	$\alpha$	$n\alpha$
Natürlicher Zustand	4,300	0,400	1,719
Polirter	2,96	0,629	1,86
Mit Gelatine gereinigt	3,313	0,520	1,724

Die Fläche zeigte, als sie mit Alkohol abgewaschen und mit Leinen getrocknet wurde, eine Abnahme von  $\Delta$ , was wieder eine Entfernung vom natürlichen Zustand bedeutet. Dies ist wichtig, wie sich späterhin zeigen wird.

Das Reinigungsverfahren mit Gelatine wurde dann wiederholt, es wurde auch Collodium über die Fläche gegossen und die getrocknete Haut abgezogen. Es ist meist nur für  $\varphi =$

1) Die Verminderung von  $S^2$  durch die Politur von 22 auf 12 deutet darauf hin, dass vielleicht bei den p. 273 erwähnten Metallen  $S^2$  im allgemeinen grösser ist, sodass die Näherungsformeln noch strenger gültig werden.



70° beobachtet, im Folgenden stehen die an dieser Platte für jenen Einfallswinkel beobachteten Resultate.

	$\pi - \Delta$	$2\psi$
Natürlicher Zustand . . . . .	33° 12'	37° 32'
Polirter „ . . . . .	62 48	36 59
Mit Alkohol gewaschen und Leinen gerieben . . . . .	68 48	35 24
Weiter gerieben . . . . .	62 42	34 8
Weiter gerieben . . . . .	55 39	32 16
Weiter gerieben . . . . .	58 54	33 28
Mit Gelatine gereinigt . . . . .	54 1	34 16
Mit Alkohol und Leinen behandelt . . . . .	58 20	35 40
Wieder mit Gelatine gereinigt . . . . .	52 28	34 40
Mit Leinen abgerieben . . . . .	56 42	35 42
Noch einmal mit Gelatine gereinigt . . . . .	56 15	36 2
Mit Alkohol abgerieben . . . . .	62 18	37 34
Mit Collodium gereinigt . . . . .	48 12	34 25
Mit verdünnter Schwefelsäure behandelt . . . . .	56 0	30 42

Die Zahlen zeigen, dass die Reinigung mit Collodium hier die dem ursprünglichen Zustand am nächsten liegenden Werthe giebt. Wiederholtes Reinigen mit Gelatine ergiebt schliesslich keine Abnahme von  $\pi - \Delta$ .  $\psi$  wird weniger beeinflusst, für  $\varphi = 70^\circ$  nimmt  $\psi$  durch die angewandten Behandlungen ab, für grössere Winkel wächst es, entsprechend der Vergrösserung von  $\alpha$ .<sup>1)</sup> Die Fläche wurde in verdünnte Schwefelsäure gelegt, um den Wiener Kalk und das Pariser Roth, mit denen polirt war, aufzulösen. Die Schwefelsäure hatte aber den Bleiglanz selbst angegriffen, indem er farbig angelaufen war, sodass die zuletzt angegebenen Zahlen mit den früheren nicht vergleichbar sind.

Aus dem grossen Bleiglanzwürfel wurde ein kleinerer abgespalten und drei zu einander senkrechte Flächen polirt. Es geschah dies deshalb, um eventuell eine optische Anomalie durch Reflexionsbeobachtungen zu entdecken. Es zeigte sich nun in der That eine Fläche (I) von den zwei anderen II und III wesentlich verschieden, während II und III übereinstimmten. Da aber die erhaltenen Werthe von  $\psi$  und  $\Delta$  mit dem Azimuth der Einfallsebene nicht variirten, so war dies ein Anzeichen dafür, dass nicht der Bleiglanz durch innere Spannungen irregulär geworden, sondern dass die

1) Vergl. Tabelle III und IV.

Oberflächenbeschaffenheit der drei Flächen eine verschiedene war. In der That ergaben sie auch nach gründlicher Behandlung mit Alkohol und Leinen annähernd gleiche Resultate.

Die ursprünglichen, nach der Politur erhaltenen Werthe von  $\psi$  und  $A$  waren folgende:

Tabelle I. Polirt.

$\varphi$	50°	70°	72°	74°	76°	78°
$A$	$\pi - 15^\circ 14'$	$\pi - 53^\circ -'$	$\pi - 64^\circ 10'$	$\pi - 81^\circ -'$	$82^\circ -'$	$63^\circ 30'$
$2\psi$	65 18	34 17	31 -	28 33	28 50	30 53
$\log \operatorname{tg} Q$	9,7568	9,7359	9,7331	9,7303	9,7366	9,7286
$\log S$	0,5515	0,5695	0,5593	0,5628	0,5627	0,5669

Mittelwerth:  $\log \operatorname{tg} Q = 9,7369$ ,  $\log S = 0,5638$ ,  $n = 3,32$ ,  
 $z = 0,510$ ,  $nz = 1,69$ .

II, III. Polirt.

$\varphi$	50°	70°	72°	74°	76°	78°
$A$	$\pi - 14^\circ 55'$	$\pi - 58^\circ 30'$	$\pi - 64^\circ 54'$	$\pi - 85^\circ 36'$	$76^\circ -'$	$59^\circ 42'$
$2\psi$	66 24	33 40	30 41	30 9	30 45	34 14
$\log \operatorname{tg} Q$	9,7702	9,7543	9,7460	9,7628	9,7614	9,7690
$\log S$	0,5690	0,5450	0,5372	0,5461	0,5408	0,5413

Mittelwerth:  $\log \operatorname{tg} Q = 9,7606$ ,  $\log S = 0,5466$ ,  $n = 3,16$ ,  
 $z = 0,536$ ,  $nz = 1,69$ .

Die Werthe für  $n$  und  $z$  liegen zwischen den auf p. 552 angegebenen. Für I ist  $Q$  und  $S$  constant, für II und III nehmen  $Q$  und  $S$  parallel miteinander erst ab, dann zu.

Auch hier wurden die Flächen mit Gelatine gereinigt; die Lösung wurde bis zum Kochen erhitzt. Es zeigte sich für  $\varphi = 70^\circ$ :

$$\text{I: } \pi - A = 56^\circ 6', 2\psi = 36^\circ 34'$$

$$\text{II: } \pi - A = 59^\circ 15', 2\psi = 36^\circ 52'$$

$$\text{III: } \pi - A = 55^\circ 47', 2\psi = 35^\circ 18'.$$

Mit Alkohol und Leinen behandelt, ergab sich:

$$\pi - A = 52^\circ 15', 2\psi = 34^\circ 40',$$

d. h. es war  $\pi - A$  verkleinert, im Gegensatz zu dem bei der früher erwähnten (p. 552) Fläche erhaltenen Resultate. Es hängt dies damit zusammen, dass die Gelatinelösung hier

auf den Flächen gekocht hatte, wodurch wahrscheinlich dieselben etwas verändert waren, wie spätere Versuche zeigten (s. p. 558). Collodiumreinigung ergab auch hier die kleineren Werthe von  $\pi - \Delta$  als Gelatinereinigung, nämlich:

$$\pi - \Delta = 54^{\circ} 10', \quad 2\psi = 34^{\circ} 45'.$$

Darauf folgende Behandlung mit Leinen vergrösserte wieder  $\pi - \Delta$ .

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Politur der Flächen durch die verschiedenen Behandlungen durchaus nicht litt.

Man könnte einwenden, dass die Gelatine deshalb den Bleiglanz nicht vollständig reinigt, weil durch das Wasser derselbe oxydirt oder irgendwie verändert wird, und dass deshalb das Collodiumverfahren hier gründlicher reinigt. Wenn dies nun auch im letzten Falle eingetreten sein mag, da durch besondere Versuche constatirt wurde, dass kochendes destillirtes Wasser in der That auf Bleiglanz wirkt, so trifft dies in dem früher (p. 552) angegebenen Falle, wo die Gelatinelösung nicht kochte, nicht zu, oder wenigstens ist die gebildete Oxydschicht mit der Gelatine abgerissen, da hier durch Putzen mit Leinen  $\pi - \Delta$  vergrössert wurde. Denn es zeigte sich (cf. p. 558), dass, wenn sich wirklich eine Oxydschicht gebildet hatte, diese auf Leinen abgerieben werden konnte, und dass dann eine Verminderung von  $\pi - \Delta$  entstand.

Was man auch für andere Reinigungsverfahren vorschlagen mag, nie wird man auf den ursprünglichen Zustand zurückkommen, da schon ein loses Reiben mit trockenem Leinen oder Leder, was doch sonst stets beim Vor- oder Nachputzen angewandt wird, auf eine frische Spaltfläche ausserordentliche Wirkung übt. Ebenso empfindlich zeigt dieselbe sich gegenüber einer Berührung mit den Fingern und gegen den Hauch. Es ist sehr auffallend, dass für eine frische Fläche, die sich an der Luft tagelang unverändert erhält, bei losem Reiben mit Leinen bei  $70^{\circ}$  Einfallswinkel  $\pi - \Delta$  von  $33^{\circ} 12'$  auf  $42^{\circ} 12'$ , beim Reiben mit Putzleder auf  $40^{\circ} 20'$  wächst. Auch  $\psi$  wird verändert in dem Sinne, wie es die Politur ändert (cf. Tabelle IV). Der ursprüngliche Zustand war auf keine Weise wieder zu gewinnen. Selbst auf Spaltflächen, die nicht mehr intact waren, zeigte sich der

Einfluss des Reibemittels bedeutend. Von den vielen beobachteten einzelnen Fällen greife ich nur eine Reihe heraus, die mit einer Spaltfläche von Bleiglanz und Antimonglanz angestellt waren. Es ist nur  $\Delta$  beobachtet, da dies schon zur Constatirung der Veränderung genügte. Dieselbe Fläche wurde mit den verschiedenen Substanzen nacheinander in Berührung gebracht.

$$\varphi = 70^\circ.$$

		Bleiglanz	Antimonglanz
		$\pi - \Delta$	$\Delta - \pi$
Gerieben auf	Leder . . . . .	46°0'	36°33'
dann	„ Leinen . . . . .	53 54	41 42
„	„ Leder . . . . .	40 24	34 30
„	„ Leinen . . . . .	51 0	40 45
Mit Flamme	des Bunsenbrenners bestrichen	68 30	44 24
	Leinen . . . . .	55 30	
	Wolle . . . . .	50 36	51 13
	Papier . . . . .	50 36	51 10
	Leder . . . . .	41 0	36 15
	Papier . . . . .	41 0	36 13
	Flamme . . . . .	73 50	42 36
	Leder . . . . .		34 30
	Seide . . . . .		39 10

Papier zeigt keinen Einfluss, die Bunsenflamme den grössten.

Die grössere Einwirkung reinen Leinens als die von Putzleder ist sehr auffallend; sie ist an sehr vielen Beispielen, die ich nicht weiter anführe, constatirt. Steinsalz verhielt sich ganz ebenso (cf. p. 541). Die Parallelität<sup>1)</sup> des Ganges der Verzögerung beim Blei- und Antimonglanz spricht dafür, dass die Natur der Oberflächenschicht wesentlich vom Reibmittel abhängt.

Ebenso empfindlich zeigten sich frische Spaltflächen der Berührung mit destillirtem Wasser gegenüber. War eine frische Fläche einmal in Wasser getaucht, so war nach dem Abtrocknen desselben, was in Luft oder mit Fliesspapier<sup>2)</sup> geschah,  $\pi - \Delta$  von 33°12' auf 49°20' gestiegen, was wahrscheinlich die Wirkung einer festgehaltenen Wasseroberflächenschicht ist.

1) Nur bei Wolle findet sich eine Abweichung.

2) Durch einen besonderen Versuch wurde constatirt, dass trockenes Fliesspapier auf Bleiglanz nicht wirkt.

Es wurden auch einige Beobachtungen bei  $\varphi = 70^\circ$  in Wasser angestellt. Die in Wasser gespaltenen Stücke ergaben nahezu denselben Werth, als die in Luft gespaltenen und dann eingetauchten. Auch wiederholtes Herausnehmen und Wiedereintauchen ergab keine wesentlichen Aenderungen für  $\psi$  und  $\Delta$ . Da dies, wie wir oben sahen, wesentliche Aenderungen für die Beobachtungen in Luft gibt, so ist es interessant, zu prüfen, für welchen Zustand die Beobachtungen in Luft mit denen in Wasser am besten stimmen. Es ist dies der frische, für den  $2\psi = 37^\circ 32'$ ,  $\Delta = \pi - 33^\circ 12'$  beobachtet ist; es ist ja auch begreiflich, dass die Wirkung einer Wasseroberflächenschicht im Wasser selbst verschwindet. Nach den Formeln folgt:

$$2\psi_0 = 27^\circ 23', \quad \Delta_0 = \pi - 54^\circ 19'.$$

Beobachtet ist:  $2\psi_0 = 24^\circ 25'$ ,  $\Delta_0 = \pi - 59^\circ 24'$ .

Die Abweichung könnte aus einer Verdichtung des Wassers am Bleiglanz, d. h. aus einer Vergrößerung von  $n_0$  erklärt werden. Nach Formel (10) muss  $Q = Q_0$ ,  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} P = n_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} P_0$  sein. Es ist nun:

$$Q = 22^\circ 49', \quad Q_0 = 21^\circ 21'$$

also die erste Bedingung nahezu erfüllt. Aus der zweiten folgt:

$$n_0 = 1,417.$$

Wurden Spaltflächen in Wasser beobachtet, welche durch Politur oder Reiben ihre natürlichen Werthe eingebüsst hatten, so ergaben sie auch im Wasser andere Werthe für  $\pi - \Delta$  und  $2\psi$ , denn die Wirkung einer durch Leder z. B. aufgeriebenen Oberflächenschicht kann im Wasser nicht verschwinden.

So erhielt ich z. B. für  $\varphi = 70^\circ$ :

$$\Delta = \pi - 52^\circ 15', \quad 2\psi = 33^\circ 37',$$

$$\Delta_0 = \pi - 81^\circ, \quad 2\psi_0 = 29^\circ 0',$$

daraus:

$$\log \operatorname{tg} Q = 9,7207, \quad \log \operatorname{tg} Q_0 = 9,7384$$

$$\frac{1}{2} P = \frac{1}{2} \pi - 35^\circ 6', \quad \frac{1}{2} P_0 = \pi - 42^\circ 49'$$

$$n = 1,535.$$

Ein anderes Beispiel ist:

$$\Delta = \pi - 43^\circ 12', \quad 2\psi = 36^\circ 10'$$

$$\Delta_0 = \pi - 67^\circ 48', \quad 2\psi_0 = 28^\circ 22'$$

$$\begin{aligned}\log \operatorname{tg} Q &= 9,8636, & \log \operatorname{tg} Q_0 &= 9,8625 \\ \frac{1}{2} P &= \frac{1}{2} \pi - 32^\circ 16', & \frac{1}{2} P_0 &= \frac{1}{2} \pi - 39^\circ 57' \\ n_0 &= 1,327.\end{aligned}$$

Es ist übrigens zu bemerken, dass die (p. 547) entwickelten Formeln hier nicht streng gültig sind, da der Vorgang der Reflexion bei einer Oberflächenschicht wesentlich complicirter ist und diese ist auch bei einer frischen Spaltfläche im Wasser vorhanden, da letzteres eine solche bilden wird. Deshalb haben die Werthe für  $n_0$  auch keine directe Bedeutung, ich habe sie nur angegeben, um die Abweichung vom normalen Verhalten zu kennzeichnen.

Ich werde auf diesen Punkt im II. Theile zurückkommen.

Wurden die Flächen in destillirtem Wasser ausgekocht und nach dem Erkalten darin beobachtet, so war in den eben angeführten Fällen  $\Delta_0$  und  $2\psi_0$  geworden zu:

$$\pi - 97^\circ 15', \quad 39^\circ 38', \quad \text{resp.} \quad \pi - 100^\circ 24', \quad 39^\circ 14'.$$

Darauf in Luft gebracht, ergab sich:

$$\begin{array}{lll}\Delta = \pi - 73^\circ, & 2\psi = 38^\circ 6', \\ \text{resp.} & \pi - 87^\circ 50', & 42^\circ 0'.$$

Diese wesentlichen Veränderungen waren dadurch hervorgerufen, dass das kochende Wasser den Bleiglanz mit einer bräunlichen Schicht überzogen hatte, die aber nur bei genauer Betrachtung zu bemerken war. Auf Leinen konnte sie abgerieben werden, es zeigte sich dann eine bedeutende Abnahme von  $\pi - \Delta$ , nämlich:

$$\begin{array}{ll}\Delta & 2\psi \\ \pi - 40^\circ 45', & 33^\circ 58'.$$

Dies dient dem p. 555 Gesagten zur Stütze.

Die ausserordentliche Empfindlichkeit solcher Spaltflächen gegenüber der geringsten Politur oder der Berührung mit Flüssigkeiten ist wohl so zu erklären, dass, da durch die Spaltung der Oberfläche eine früher ihr anhaftende Schicht genommen ist, dieselbe in gleichsam ungesättigtem Zustand ist und jeden ihr gebotenen Körper anzieht und festhält. Es muss sich dies auch in einer starken Condensation von Gasen bemerkbar machen, worüber Versuche anzustellen wären. — Nach dieser Vorstellung ist natürlich,

dass die einmal erzeugte Oberflächenschicht auf keine Weise ganz wieder zu entfernen ist, es wäre denn, dass durch Reiben auf dem eigenen Pulver, wie Seebeck gethan hat, die fremde Oberflächenschicht durch eine natürliche verdrängt werden könnte.

Im Folgenden fasse ich die erhaltenen Resultate kurz zusammen. Sie sind zwar nur an den angegebenen Körpern beobachtet, es ist aber wahrscheinlich, dass sie zu verallgemeinern sind.

1) *Feste, sowohl durchsichtige, wie absorbirende Körper reflectiren auf natürlichen Spaltungsflächen das Licht nach den Gesetzen der Fresnel-Neumann'schen, resp. der Voigt'schen Theorie.*

2) *Durch Poliren oder Berühren mit Flüssigkeiten entstehen Oberflächenschichten, welche bei durchsichtigen Medien die elliptische Polarisirung, bei undurchsichtigen wesentliche Aenderungen der aus den Reflexionsbeobachtungen berechneten optischen Constanten hervorrufen.*

3) *Diese Oberflächenschichten sind auf keine Weise zu entfernen.*

4) *Bleiglanz hat für Natriumlicht den Brechungsexponenten  $n = 4,30$ , den Absorptionscoefficienten  $nx = 1,72$ .*

5) *Die angegebenen Näherungsformeln für die Metallreflexion sind bei fast allen bis jetzt beobachteten absorbirenden Medien anzuwenden.*

### Nachtrag.

Nach Abschluss der soeben mitgetheilten Beobachtungen wird mir eine Arbeit des Hrn. Spurge<sup>1)</sup> über die Reflexion des Lichtes an natürlichen Spaltflächen von isländischem Doppelspath bekannt. Dieselbe hat aber nicht so sehr den Zweck, den Kalkspath in frischem Zustande auf die elliptische Polarisirung hin, als vielmehr die Veränderung, welche die Politur hervorbringt, zu untersuchen. Hr. Spurge beschränkt sich darauf, dies für einen einzigen Einfallswinkel zu thun, und ich glaube daher, dass die von mir mitgetheilten Beobachtungen in dieser Beziehung eine Vervollständigung

1) C. Spurge, Proc. Roy. Soc. 42. p. 242. 1887.

bieten, da mindestens für zwei auf verschiedenen Seiten des Haupteinfallswinkels liegende Einfallswinkel zu beobachten ist, wenn man den Einfluss der Politur klar erkennen will.

Ueber die Grösse des Einfallswinkels, bei dem Hr. Spurge beobachtet hat, kann ich keine directe Angabe finden, muss jedoch aus dem Werthe des Azimuths  $J$  der grossen Axe der Ellipse, in welcher die Aethertheilchen in der reflectirten Bewegung schwingen, das sich zu  $72^\circ$  ergab, schliessen, dass sich der Einfallswinkel ziemlich weit vom Haupteinfallswinkel entfernte. Wenn man aber den Beweis fehlender elliptischer Polarisirung erbringen will, so kommt es auf möglichste Annäherung an den Haupteinfallswinkel an.

Ausser dem Azimuth  $J$  hat Hr. Spurge das Axenverhältniss  $\tan \omega$  der Ellipse gemessen. Für kleine Verzögerung  $A$  besteht die Relation:

$$\tan \omega = \frac{1}{2} \sin 2J \cdot A.$$

Die Methode empfiehlt sich daher nicht zur genauen Bestimmung von  $A$ , da in der Nähe des Haupteinfallswinkels, wo  $J$  sehr klein wird,  $A$  als Quotient zweier sehr kleinen Grösse auftritt.

Hr. Spurge hat constatirt, dass die polirte Fläche sich nicht mit der Zeit änderte. Die frische Fläche ist hierauf nicht geprüft. Es lässt mich dies schliessen, dass die Beobachtungen an ihr nicht mit der grössten Schnelligkeit nach vorgenommener Spaltung angestellt sind, worauf es sehr oft ankommt. Dies wird dadurch bestätigt, dass, wie ich nach den von Hrn. Spurge mitgetheilten Zahlenwerthen nach obiger Formel berechnet habe, infolge der Politur  $A$  von  $0,0180 \lambda$  auf  $0,0138 \lambda$  abnimmt, was nach den vorstehenden Beobachtungen aufs deutlichste gegen den frischen Zustand der Spaltfläche spricht.

Phys. Inst. zu Göttingen, Juni 1888.



**XV. Mittheilung, das Totalreflectometer betreffend;  
von C. Pulfrich.**

Vor kurzem hat Ch. Soret eine für die Krystalloptik wichtige Arbeit<sup>1)</sup> veröffentlicht. War man bisher wohl allgemein der Ansicht, dass die Bestimmung der Hauptbrechungsindices von zweiaxigen Krystallen nach der Methode der Totalreflexion eine Schnittebene verlange, die wenigstens zu einer Elasticitätsaxe parallel sein müsse, so hat Soret in der citirten Arbeit den Nachweis geliefert, dass eine jede, beliebig durch den Krystall gelegte Schnittebene zur Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten, resp. ihrer reciproken Werthe, der Hauptbrechungsindices verwerthet werden kann. Der grosse Nutzen, der damit für die Praxis entsteht, bedarf keiner weiteren Begründung.

Die Frage nach dem Einfluss der Lage der Schnittfläche auf die Ermittlung der Hauptbrechungsindices zweiaxiger Krystalle hat mich in letzter Zeit vielfach beschäftigt, indem ich zugleich bestrebt war, der Lösung experimentell mit Hülfe des Totalreflectometers näher zu treten. Soweit meine diesbezüglichen Untersuchungen bis jetzt erledigt sind, stehen dieselben in vollem Einklang mit dem Soret'schen Resultate. Für jede Schnittebene, welche in einiger Entfernung von den optischen Axenrichtungen durch den zweiaxigen Krystall hindurchgeht, ergeben sich stets zwei Maximal- und zwei Minimalwerthe für den Grenzwinkel der Totalreflexion, von denen jedesmal drei den Hauptbrechungsindices entsprechen. Im Totalreflectometer hat man zwei veränderliche Curven, deren jede zwischen einem zugehörigen Maximum und Minimum hin und her wandert. Die Umkehrlagen sind aber jetzt nicht mehr um genau  $90^\circ$  von den benachbarten entfernt, wie das früher bei den einaxigen Krystallen und denjenigen Schnittflächen zweiaxiger Krystalle der Fall war, welche parallel zu einer Symmetrieebene oder wenigstens parallel zu einer Symmetrieaxe verliefen. Auch die Umkehrlagen der oberen und unteren Curve fallen nicht mehr in dasselbe Azimut. Die vier

1) Ch. Soret, Arch. des sciences phys. et nat. 20. p. 263. 1888.  
Im Auszuge vorher mitgetheilt: Compt. rend. 107. p. 176 u. 479. 1888.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.

Maxima und Minima erscheinen vielmehr gegeneinander verschoben, und beide Curven sind unsymmetrisch. Da aber jeder Schnitt die drei den Hauptschnitten zugehörigen Kreise, deren Radienvectoren den drei Hauptlichtgeschwindigkeiten einzeln gleich sind, in je zwei um  $180^\circ$  auseinanderliegenden Punkten schneidet, so liefern von den vier Umkehrlagen die höchste und niedrigste allgemein den höchsten und niedrigsten der drei Hauptbrechungsindices,  $n_\gamma$  und  $n_\alpha$ , während der mittlere Index  $n_\beta$  eine kleine Ueberlegung verlangt, bevor man sich für eine der beiden mittleren Lagen entscheidet. Dieselbe lässt sich umgehen, wenn man eine zweite ebenfalls beliebig gelegene Fläche der Untersuchung unterwirft. Vergegenwärtigt man sich die Wirkungsweise des Totalreflectometers, so ist ersichtlich, dass der Cylinder in Bezug auf die Bestimmung der Extremlagen, in welchen die Curven nicht nur ihre Bewegungsrichtung umkehren, sondern auch im Maximum der Schärfe auftreten, vorzügliche Dienste leistet.

Eine besondere Vorsicht bei der Bestimmung von  $n_\beta$  ist nur dann geboten, wenn die Fläche in die unmittelbare Nähe der optischen Axen fällt. In der Richtung der optischen Axen zeigen nämlich die Grenzcurven der Totalreflexion Besonderheiten, auf die de Sénarmont (1856) zuerst aufmerksam gemacht hat, und die durch den Einfluss der conischen Refraction bedingt sind. Sie wurden bis jetzt nur von W. Kohlrausch (1879) an Weinsäureplatten wirklich beobachtet und in zehn Zeichnungen fixirt. Liebisch und Mallard (1886) haben in ihren theoretischen Erörterungen ebenfalls diesen Gegenstand berührt. Auch Ch. Soret kommt in der oben erwähnten Arbeit ausführlich darauf zurück. Mir selbst ist es kürzlich gelungen, die eigenthümlichen hyperbolischen Grenzcurven, die sich im Augenblick des Durchschneidens der beiden Grenzcurven an dieselben anlegen, in grosser Deutlichkeit an einer Asparaginplatte zu beobachten, nachdem ich mich lange Zeit vergeblich bemüht hatte, ein geeignetes Weinsäurepräparat zu erhalten. Asparagin hat zwar eine etwas geringere Doppelbrechung als Weinsäure, verdient aber in Bezug auf Herstellung des Schliffes und Haltbarkeit der Politur den entschiedenem Vorzug vor der so sehr empfindlichen Weinsäure. Dass die Grösse der Doppelbrechung allein

nicht entscheidend für die Sichtbarkeit der hyperbolischen Curven ist, sondern letztere nebenher noch durch die Grösse des Axenwinkels (für Asparagin  $86^\circ$ ) bedingt ist, geht aus dem Umstande hervor, dass trotz der starken Doppelbrechung, welche Arragonit besitzt, infolge des kleinen Axenwinkels ( $17^\circ$ ) die Erscheinung hier nicht zu beobachten war. Auch alle übrigen von Hrn. Mülheims untersuchten und parallel zu den beiden Axen geschliffenen Krystalle haben nichts von den Nebenerscheinungen, und zwar infolge der geringen Doppelbrechung, erkennen lassen.

Die Beobachtung der Erscheinung an Asparagin erfolgte unter Benutzung des streifenden Lichteintritts; die vollkommene Uebereinstimmung mit der Theorie liefert somit den Beweis dafür, dass principiell auch hier die Art der Beleuchtung ohne Bedeutung ist. Infolge der nachtheiligen Einwirkung des Cylindermantels auf die schrägliegende Curve ist zur Beobachtung der Erscheinung der conischen Refraktion die Anwendung des dem Apparat beigegebenen  $90$  gradigen Prismas geboten.

Noch in anderer Richtung bot die von mir untersuchte Asparaginplatte einige bemerkenswerthe Erscheinungen dar, die bis jetzt noch nicht beobachtet worden sind. Die Fläche enthielt vollkommen genau nur die eine der beiden optischen Axen, wick aber um ein geringes von der zweiten optischen Axe ab. In der Gegend der grössten Annäherung der beiden Curven (ein Durchschneiden findet ja bei der geringsten Abweichung von der optischen Axenrichtung nicht mehr statt) zeigte sich nun in unmittelbarer Nähe der unteren Curve, und zwar ausserhalb des von den beiden Curven eingeschlossenen Gebietes eine eigenthümliche Interferenzfigur, die besonders deutlich bei Benutzung eines Nicols sichtbar wurde und grosse Aehnlichkeit mit der Interferenzerscheinung besitzt, welche eine senkrecht zu einer Axe geschliffene zweiaxige Krystallplatte im Polarisationsmikroskop erkennen lässt.

Dass die Erscheinung mit der schiefen Lage der Axe zur Krystallfläche zusammenhängt, unterliegt keinem Zweifel. Denn einmal gekört die Figur einem Helligkeitsgebiet an, welches durch Strahlen, die durch den Krystall gegangen sind, erzeugt wird, und ferner ist sie bei einer Drehung der Platte um  $180^\circ$

vollständig verschwunden. Auch nur bei streifender Incidenz ist sie sichtbar, nicht aber bei Benutzung der eigentlichen Methode der Totalreflexion.

Eine zweite Asparaginplatte, die noch in stärkerem Grade von den beiden Axen abwich, zeigte dieselbe Interferenzfigur unterhalb der beiden Curven, jetzt aber in grösserem Abstände von denselben. Da ich mich auf diese Weise und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass bei einer Drehung um  $180^\circ$  die Erscheinung nicht eintrat, leicht über die genaue Lage zur Axenebene orientiren konnte, so genügte beim Nachschleifen ein geringer einseitiger Druck, um die Büschel den Curven näher zu bringen. Innerhalb der Curven habe ich die Erscheinung noch nicht beobachtet.

Nachdem ich einmal bei Asparagin die Figur gesehen hatte, habe ich noch bei einer fehlerhaft geschliffenen Topasplatte eine leichte Andeutung der Interferenzfigur wiedergefunden. In grosser Ausdehnung und Regelmässigkeit trat dieselbe aber bei einer Aragonitplatte auf, bei welcher beide Axen mehr oder weniger von der Schnittebene abwichen, und zwar hier mit dem Resultat, dass bei einer Drehung um  $180^\circ$  die entfernteren dunkeln Kreisringe noch sichtbar waren, der Mittelpunkt der Figur zwar fehlte, nach Maassgabe der Ringe aber oberhalb der beiden Curven in das dunkle von Strahlen nicht betroffene Gebiet fallen musste.

Ohne hier eine Erklärung dieser augenscheinlich durch die Strahlenbrechung in der Richtung der optischen Axe bedingten Erscheinung versuchen zu wollen, will ich noch jener weiteren, bei der Aragonitplatte auftretenden und vollständig neben den eigentlichen Grenzcurven herlaufenden Interferenzfiguren und Grenzlinien Erwähnung thun, die vielleicht in einer Zwillingsbildung ihre Erklärung findet, und welche die von Hrn. Mülheims<sup>1)</sup> untersuchte Aragonitplatte nicht gezeigt hat. Sie bestehen in einem ähnlichen und ungefähr parallel zu den beiden Curven verlaufenden Liniensystem mit Interferenzstreifen, das bei einer Drehung des Nicols einem ebensolchen Wechsel der Helligkeit unterworfen ist, wie die Hauptgrenzcurven, und auch bei einer Drehung der Krystallplatte um  $180^\circ$  eine entsprechende

1) Mülheims, Groth, Z. für Krystallographie. Bd. 14. 1888.

Abhängigkeit von der Lage der Platte zur optischen Axenebene aufweist, wie die Hauptcurven selbst. Auch hier bleiben bei Benutzung der Methode der Totalreflexion nur die ursprünglichen Hauptgrenzcurven sichtbar.

Ich beschränke mich auf eine kurze Skizzirung der wichtigsten Dinge, da ich an anderer Stelle ausführlich auf diesen Gegenstand zurückkommen werde. Ich habe es für zweckdienlich gehalten, sämmtliche Mittheilungen über die Anwendung des Totalreflectometers in der Krystalloptik in vollständig einheitlicher Behandlung in einer besonderen Schrift zusammen zu fassen und dabei alle jene Punkte mit aufzunehmen, die noch einer Ergänzung bedürfen. Während durch eigene Untersuchungen sowohl als auch durch die ausgedehnten Messungsreihen des Hrn. Mülheims sich das Verfahren erprobt hat, ist der Gegenstand durch die oben erwähnte Arbeit von Soret und die vorstehend angedeuteten Versuche zu einem erfreulichen Abschluss gelangt.

Noch auf einen Punkt möchte ich mir erlauben, hier kurz hinzuweisen. In meiner ersten Veröffentlichung über das Totalreflectometer<sup>1)</sup> habe ich einen Versuch mit einer auf Glas aufgeklebten Quarzplatte beschrieben, bei welchem die sämmtlichen einzelnen Schichten: Flüssigkeit (1,5822), Quarz (1,5532 und 1,5442), Canadabalsam (1,5404) und Glas (1,5181) je eine deutliche Grenzcurve lieferten, die der Messung zugänglich waren. Durch drei Schichten hindurch war die Messung des Brechungsindex des oben befindlichen Glases möglich, wobei man eine etwa vorhandene keilförmige Gestalt der einzelnen Schichten durch Drehen um  $180^\circ$  und Mittelbildung eliminirte. Dieselbe Methode habe ich in letzter Zeit mit einigen anderen schwach brechenden Objecten zur Ausführung gebracht. Die Platte, beispielsweise Gyps, wird mit Canadabalsam (1,54) zwischen zwei Flintglasplatten (1,61) eingekittet. Die Messung des Hauptbrechungsindices und des Axenwinkels erfolgt ebenso wie früher, als die Gypsplatte direct auf dem Cylinder aufruhte; nur ist das Object jetzt nicht mehr der Gefahr der Beschädigung ausgesetzt.

Die Anwendbarkeit dieser Methode, empfindliche Objecte,

1) Pulfrich, Wied. Ann. 30. p. 206. 1887; Taf. X Fig. 13a.

die leicht an der Luft oder in Berührung mit der Flüssigkeit ihr Politur einbüßen, gleichsam hinter Glas und Rahmen zu untersuchen, ist aber, sobald man sie auf stärker brechende Substanzen ausdehnen will, an einen Kitt gebunden, der einen höheren Index besitzt, als der gewöhnlich benutzte Canada-balsam hat. Ein solcher Kitt ist mir bis jetzt noch nicht bekannt.

Bonn, Ende October 1888.

**XVI. Untersuchungen über die Constitution  
gasförmiger Weltkörper<sup>1)</sup>;  
von A. Ritter in Aachen.**

Neunzehnte Abtheilung.

§ 77. Einfluss der Meteoritenfälle auf den Zustand der Oberflächenschicht eines gasförmigen Weltkörpers.

Die bei diesen Untersuchungen bisher benutzten, resp. neu aufgestellten Thesen und Hypothesen können ihrer Natur nach in zwei verschiedenen Gruppen gesondert werden. Die eine umfasst alle diejenigen, welche allgemein als unanfechtbar gelten und einer näheren Begründung deshalb nicht bedürfen, während die andere Gruppe aus solchen besteht, welche bei voller Anerkennung ihrer Unzuverlässigkeit nur versuchsweise aufgestellt wurden, zum Zwecke der Gewinnung eines vorläufigen Ausgangspunktes und einer ersten Annäherung an das später zu erreichende Ziel.

Als zuverlässig und vollkommen einwandfrei können zur ersteren Classe die folgenden Thesen gerechnet werden: Die Sonne strahlt fortwährend mehr Wärme aus, als sie durch Zustrahlung empfängt. Infolge dieses Ueberwiegens der Ausstrahlung findet eine im grossen und ganzen beständig fortschreitende Contraction des Sonnenkörpers statt. Die Sonne hatte also in früheren Zeiten ein grösseres Volumen und eine geringere mittlere Dichtigkeit als jetzt.

1) A. Ritter, Wied. Ann. 18. p. 488. 1883; 20. p. 137 u. 897. 1883.

Die Hypothese des gasförmigen Zustandes der Sonne müsste dagegen zur zweiten Gruppe gerechnet werden; denn niemand ist im Stande, zuverlässige Auskunft darüber zu geben, wie das Innere der Sonnenmasse beschaffen ist. Aber wenn auch alle aus dieser letzteren Hypothese und aus der Voraussetzung einer annähernden Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes gezogenen Folgerungen in Bezug auf den gegenwärtigen Zustand der Sonne für ungültig erklärt werden sollten, so müsste doch zugegeben werden, dass in früheren Zeiten, als die Sonne ein beträchtlich grösseres Volumen hatte, diese Hypothesen ein gewisses Maass von Berechtigung beanspruchen konnten. Es handelt sich also nur um die Frage: zu welcher Zeit eine auf diese Hypothesen gegründete Theorie als wenigstens annäherungsweise zutreffend gelten konnte. Möglich ist es, dass diese Zeit der fernen Vergangenheit angehört; aber keinesfalls kann die Discussion jener Hypothesen ganz umgangen werden. Wer eine endgültige und vollständige Entwicklungstheorie der Sonne zu geben unternimmt, wird nothwendig auch über die Zustandsänderung einer annähernd dem Mariotte'schen Gesetze unterworfenen Gaskugel Auskunft zu geben im Stande sein müssen.

Ueber die Frage: wie weit gerade der adiabatische Gleichgewichtszustand als der natürliche oder normale Zustand einer wärmeausstrahlenden Gaskugel anzusehen ist, lässt sich ebenfalls streiten. Da jedoch vorderhand kein anderer Zustand bekannt ist, von welchem der adiabatische Zustand hinsichtlich seiner Berechtigung als Ausgangspunkt gewählt zu werden übertroffen wird, so scheint die Discussion des adiabatischen Gleichgewichtszustandes ebenfalls nicht wohl umgangen werden zu können, da doch nothwendig irgend ein bestimmter Zustand als Ausgangspunkt für die Untersuchung der Zustandsänderungen gasförmiger Weltkörper gewählt werden muss.

Die Nothwendigkeit dieses Untersuchungsganges hat offenbar auch Sir William Thomson erkannt, als er seine Abhandlung: „On the Equilibrium of a Gas under its own Gravitation only“<sup>1)</sup> veröffentlichte. Diese Abhandlung stimmt, wenn auch nicht in der Darstellungsweise, so doch ihrem wesentlichen Inhalte nach, überein mit einem Theile der im

1) W. Thomson, Phil. Mag. 23. März 1887.



Jahre 1878 erschienenen dritten Abtheilung dieser „Untersuchungen etc.“ Augenscheinlich hat Sir W. Thomson von dieser Abhandlung keine Kenntniss gehabt, als er die seinige im Jahre 1887 veröffentlichte, worüber der Verfasser der ersteren kaum das Recht hat, sich zu beschweren, da es ihm selbst ebenso ergangen ist in Betreff einer bereits im Jahre 1870 von Homer Lane<sup>1)</sup> veröffentlichten Abhandlung, in welcher ebenfalls die Theorie des adiabatischen Gleichgewichtszustandes entwickelt und auf die Sonne angewendet wurde.

Dass in der Oberflächenschicht der Sonne Abweichungen von der adiabatischen Zustandslinie stattfinden müssen, wurde bereits in § 48 und § 49 hervorgehoben. Doch ist die Art dieser Abweichungen, wegen Mangels genauerer Kenntniss der Gesetze der Wärme-Absorption und -Reflexion in heissen Gasen noch ziemlich unbekannt, wie überhaupt eine theoretische Construction des Zustandes der Oberflächenschicht den schwierigsten Theil des Sonnenproblems zu bilden scheint. Alle Ursachen und Umstände, welche in irgend einer Weise den Zustand der Oberflächenschicht beeinflussen können — insbesondere diejenigen, welche auf eine Abweichung vom adiabatischen Gleichgewichtszustande hinwirken — verdienen deshalb die sorgfältigste Untersuchung.

Zu diesen störenden Ursachen sind unbedingt auch die Meteoritenfälle zu rechnen, da durch die bei diesen Vorgängen stattfindende Umwandlung von lebendiger Kraft in Wärme gerade demjenigen Theile der Oberflächenschicht, welcher nach der Theorie des adiabatischen Gleichgewichtszustandes die niedrigste — bis auf den absoluten Nullpunkt herabgehende — Temperatur haben müsste, beständig Wärme zugeführt wird. Es handelt sich daher nur um die Frage: in welchem Maasse durch diese Wärmezuführung der Zustand der Sonnenatmosphäre und die äussere Erscheinung der Sonne beeinflusst werden kann.

Zwar ist die von Robert Mayer aufgestellte Hypothese, nach welcher die Meteoritenfälle die alleinige Quelle der Sonnenwärme bilden sollen, als im Widerspruche mit der Theorie der

1) Homer Lane, Amer. Journ. Juli 1870. Von der Existenz dieser Abhandlung erhielt der Verfasser die erste Kunde im Jahre 1883 durch ein Citat in Newcomb's populärer Astronomie. (Deutsch von Rud. Engelmann.)



Planetenbewegungen stehend, von den Astronomen längst verworfen. Auch ist dieselbe schon dadurch hinfällig, oder mindestens überflüssig geworden, dass — wie Helmholtz zuerst gezeigt hat — die Contractionstheorie zur Erklärung der Sonnenwärme vollkommen ausreicht. Aber wenn auch hinsichtlich der Quantität ihres Beitrages zu der ausgestrahlten Wärme die Meteoritenfalle eine untergeordnete Rolle spielen, so ist doch hiermit noch keineswegs erwiesen, dass dies auch in Bezug auf die Qualität der ausgesendeten Wärmestrahlen der Fall ist. Es handelt sich hier nicht allein um die Frage: wieviel Wärme durch Meteoritenfälle erzeugt wird, sondern wesentlich auch um die Frage: ob es Wärme von niedriger oder Wärme von hoher Temperatur ist, welche der ausstrahlenden Oberflächenschicht auf solche Weise zugeführt wird.

Die Untersuchung dieser Frage gewinnt dadurch noch ein besonderes Interesse, dass — wie im folgenden Paragraphen sich herausstellen wird — es sich hier höchst wahrscheinlich um die höchsten, directer Wahrnehmung zugänglichen, Temperaturen handelt, welche überhaupt im Universum vorkommen (insofern nämlich, als die im Inneren der Weltkörper vorkommenden, zum Theil vielleicht noch höheren Temperaturen, als von directer Wahrnehmung ausgeschlossen, hier nicht in Betracht kommen). Aus den Untersuchungen des folgenden Paragraphen wird sich zugleich ergeben, dass die Temperatur der bei Meteoritenfällen erzeugten Wärme ganz unabhängig ist von den Maassengrössen der einzelnen Meteoriten. Hiernach scheint es — obwohl in Betreff der pro Zeiteinheit durchschnittlich auf jede Flächeneinheit der Sonnenoberfläche in Form von Meteoriten herabstürzenden Massenquantität bislang noch wenig Zuverlässiges bekannt ist — nur der Annahme eines hinreichenden Zertheilungsgrades dieser Masse zu bedürfen, um die Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit des erwähnten Einflusses in befriedigendem Maasse zu begründen.

Wie eine mit leuchtenden Punkten besäete dunkle Fläche aus der Ferne gesehen als helle Fläche erscheint, so mag vielleicht die an sich schon leuchtende Sonnenoberfläche infolge des gleichzeitigen Vorhandenseins zahlreicher Stellen, an welchen die Temperatur ausserordentlich hoch über die der relativ dunklen Umgebung sich erhebt, dem Beobachter nicht nur

merklich heller leuchtend erscheinen, sondern auch im Spectrum ihres Lichtes Strahlen zusenden, welche ohne das Stattfinden von Meteoritenfällen fehlen würden. Was aber in Bezug auf die Sonne gilt, das muss in noch höherem Maasse für gasförmige Weltkörper von niedrigeren Ausstrahlungstemperaturen gelten. Hieraus folgt, dass die Meteoritenfälle, soweit dieselben überhaupt einen wahrnehmbaren Einfluss ausüben, darauf hin wirken, die Unterschiede zwischen den verschiedenen Sterntypen zu verwischen. Es ist sogar recht wohl denkbar, dass es leuchtende Weltkörper giebt, welche lediglich den Meteoritenfällen die Eigenschaft des Leuchtens verdanken, und welche ohne das Stattfinden derselben überhaupt nicht wahrgenommen werden könnten.

Diese zur Erklärung des Leuchtens der Nebelflecke an anderem Orte<sup>1)</sup> schon früher aufgestellte Hypothese ist anscheinend der neuerdings von Lockyer<sup>2)</sup> aufgestellten Hypothese vorzuziehen, nach welcher die Nebelflecke selbst Meteoritenschwärme sein sollen, und die Ursache des Leuchtens darin bestehen soll, dass die einzelnen Meteoriten — entweder miteinander oder mit denen eines fremden Schwarms — gelegentlich zusammenstossen. Denn bei solchen Zusammenstößen würde zugleich eine partielle Verdampfung eintreten, und infolge dessen würde der vorher leere Raum zwischen den Meteoriten mit Dämpfen oder Gasen sich anfüllen. Die Meteoritenwolke würde also allmählich in eine mit eingestreuten festen Körpern gefüllte Gaswolke übergehen. Nach dem Eintreten dieses Zustandes würde es aber der Annahme von Zusammenstößen überhaupt nicht mehr bedürfen, um das Leuchten der Wolke zu erklären. Denn hierzu würde der Widerstand, welchen das gasförmige Medium den Bewegungen der Meteoriten entgegensetzt, schon ausreichen — wie gering auch immer die Dichtigkeit des Gases sein möge —, insofern die bei Ueberwindung dieses Widerstandes eintretende Temperaturerhöhung, wie im folgenden Paragraphen sich herausstellen wird, unabhängig ist von der Dichtigkeit des Gases. Durch die in dem gasförmigen Medium auftretenden Widerstände würden zugleich die Bewe-

1) Ritter, Exner's Repert. der Phys. 20. p. 385. 1884.

2) J. Norman Lockyer, Proc. of the Roy. Soc. 44. Nr. 266. p. 2. (12. April 1888).

gungen der Meteoriten allmählich gehemmt werden, worauf dann das Herabsinken derselben zum Gravitationscentrum ein Zusammenschrumpfen des Schwarms, und die hierbei durch die Gravitationsarbeit verursachte Wärmeentwicklung nach Ablauf eines verhältnissmässig kurzen Zeitraums den Uebergang des Meteoritenschwarms in einen gasförmigen Weltkörper herbeiführen würde.

Ausserdem ist zu berücksichtigen, dass es, wie oben bereits erwähnt wurde, der Annahme von eingestreuten festen Partikeln in der Gaswolke überhaupt nicht bedarf — weder zur Erklärung des Leuchtens der Gaswolke, noch zur Erklärung der von Lockyer angeführten Spectralerscheinungen —, da es hinsichtlich dieser Erscheinungen keinen Unterschied bedingen kann, ob es Meteoriten desselben Schwarms oder von aussen eindringende fremde Meteoriten sind, deren Bewegung das Leuchten verursacht.

Dass in manchen Fällen die Lockyer'sche Meteoritentheorie zu denselben Ergebnissen führen muss, wie die Theorie der gasförmigen Weltkörper, erklärt sich durch die nahe Verwandtschaft zwischen diesen beiden Theorien. Um die nach der ersteren Theorie erforderliche Häufigkeit der Zusammenstösse zwischen den Meteoriten eines Schwarms zu erklären, müsste man für die Gesamtmasse desselben einen entsprechend hohen Zertheilungsgrad voraussetzen. Wenn man aber diese Zertheilung so weit fortgesetzt sich denkt, dass die Lockyer'schen Meteoriten schliesslich bis auf die Grösse von Gasmoleculen zusammenschrumpfen, so würde hiermit der Unterschied zwischen beiden Theorien ganz verschwinden.

Auch in Bezug auf die Erklärung des Unterschiedes zwischen den verschiedenen Fixsternotypen — insbesondere des Unterschiedes zwischen den von Vogel mit III<sub>a</sub> und III<sub>b</sub> bezeichneten beiden Classen der rothen Fixsterne — scheint die Lockyer'sche Theorie, nach welcher die Fixsterne ebenfalls Meteoritenschwärme oder Conglomerate von Meteoriten sein sollen, keinerlei Vorzüge zu bieten vor der hier vertretenen Annahme eines gasförmigen Aggregatzustandes dieser Weltkörper.

Die neuerdings auch von Lockyer adoptirte Hypothese, nach welcher die Ausstrahlungstemperatur bei den Sternen der

Classe III<sub>a</sub> noch im Zunehmen, bei den Sternen der Classe III<sub>b</sub>, aber schon wieder im Abnehmen begriffen ist, wurde versuchsweise bereits in § 67 dieser Untersuchungen aufgestellt und ergab sich dort als eine ungezwungene Folgerung aus den Gesetzen der Zustandsänderung eines gasförmigen Weltkörpers.<sup>1)</sup> Bei Aufstellung dieser Hypothese wurde am Schlusse des § 67 zugleich bemerkt, dass eine Bestätigung derselben den weiteren Forschungen der Spectralanalyse überlassen bleiben müsse. Wenn nunmehr Lockyer auf Grundlage der Resultate neuerer Spectralforschungen ebenfalls zu dieser Ansicht sich bekennt und die ausdrückliche Erklärung hinzufügt, dass über die Richtigkeit derselben kein Zweifel obwalten könne<sup>2)</sup>, so liegt es nahe, diesen Ausspruch einer der ersten Autoritäten auf dem Gebiete der Spectralanalyse im Sinne jener, am Schlusse des § 67 als erwünscht bezeichneten Bestätigung zu verwerthen, und scheint vorläufig — gegenüber der in § 64, 65, 66 gegebenen mathematischen Begründung der obigen Hypothese — für die Heranziehung einer neuen Theorie ein Bedürfniss noch nicht vorzuliegen.

Dass die Möglichkeit eines wahrnehmbaren Einflusses der Meteoritenfälle auf die Lichtausstrahlung der Weltkörper bislang wenig beachtet worden ist, hat vielleicht darin seinen Grund, dass in Bezug auf den Vorgang des Eindringens der Meteoriten in die Atmosphäre eines Weltkörpers bisher unklare und theilweise ganz unrichtige Vorstellungen geherrscht haben, was in Betracht der Schwierigkeit, für derartige, das gewohnte terrestrische Maass überschreitenden, kosmischen Wirkungen so gleich den richtigen Maassstab der Beurtheilung zu finden, ganz begreiflich erscheint. Zwar konnte in Bezug auf die Quantität der bei diesem Vorgange erzeugten Gesamtwärme seit Begründung der mechanischen Wärmetheorie niemals ein Zweifel bestehen, da diese Quantität unmittelbar aus dem Gesetze der Aequivalenz von Wärme und lebendiger Kraft sich ergibt. Wohl aber scheint in Bezug auf die Qualität derselben — d. h. in Bezug auf die hervorgebrachte Temperaturerhöhung — behauptet werden zu dürfen, dass dieselbe bisher unterschätzt worden ist.

1) Ritter, Wied. Ann. 20. p. 156. 1883.

2) Lockyer, Proc. of the Roy. Soc. 44. p. 21. 1888.

In der von Schiaparelli<sup>1)</sup> aufgestellten „Theorie der beim Eindringen der Meteoriten in die Erdatmosphäre stattfindenden Wärmeentwicklung“ ist für den als erstes Beispiel gewählten Fall einer Eintrittsgeschwindigkeit von 72 000 Metern pro Secunde, unter Voraussetzung der Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes, eine Temperaturerhöhung von etwa 40 000 Grad berechnet worden, während die richtige Berechnung unter gleicher Voraussetzung eine Temperaturerhöhung von nahezu 4 Millionen Grad ergibt.

Schiaparelli würde für diese Temperaturerhöhung einen noch kleineren Werth gefunden haben, wenn er für die oberste Schicht der Atmosphäre, statt der willkürlich angenommenen absoluten Temperatur von 123 Grad, eine niedrigere Temperatur angenommen hätte. Denn in der von Schiaparelli abgeleiteten Gleichung erscheint der Ausdruck für die Temperatur der comprimierten Luft in Form eines Produkts, welches die ursprüngliche Temperatur (der noch nicht comprimierten Luft) als Factor enthält. Hiernach würde also — wie Schiaparelli selbst hinzufügt — die Annahme, dass die absolute Temperatur der obersten Atmosphärensicht gleich Null ist (wie es z. B. der Theorie des adiabatischen Gleichgewichtszustandes entsprechen würde), zu dem Resultate führen: dass gar keine Temperaturerhöhung hervorgebracht wird. Hierin liegt aber ein vollgültiger Beweis für die Unzulässigkeit der von Schiaparelli angewendeten Berechnungsmethode, da es dem Grundprincipe der mechanischen Wärmetheorie widersprechen würde, wenn ein Theil der lebendigen Kraft verschwände, ohne dass die äquivalente Wärmequantität erzeugt wird.

Der Fehler, welcher in die Ableitung der oben erwähnten Gleichung sich eingeschlichen hat, besteht darin: dass Schiaparelli die Compression, welche die an der Vorderfläche des eindringenden Meteoriten befindliche Luft erleidet, als eine adiabatische oder isentropische Zustandsänderung behandelt, während dieselbe in Wirklichkeit zur Kategorie der mit Entropiezunahme verbundenen, beschleunigten Zustandsänderungen gehört. Dass diese unter anderen Umständen

1) Schiaparelli, Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen. (Deutsch von Boguslawsky.)

— wie z. B. bei der Theorie des Schalls — ganz gebräuchliche und durchaus unschädliche Abweichung von der exacten Behandlungsweise verhängnissvoll für das Ergebniss der Untersuchung werden musste, erklärt sich durch die eigenthümliche Natur des vorliegenden Falles.<sup>1)</sup>

Die Gleichung für die wirklich hervorgebrachte Temperaturerhöhung kann, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll, auf eine viel einfachere Weise mittelst der elementaren Theorie des Stosses unmittelbar aus dem Grundprincipe der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet werden.

§ 78. Berechnung der beim Eindringen eines Meteoriten in die Atmosphäre eintretenden Temperaturerhöhung.

Bei geradem centralen Stosse einer mit der Geschwindigkeit  $u_1$  sich bewegenden Masse  $m_1$  gegen die mit der Geschwindigkeit  $u_2$  sich bewegende Masse  $m_2$  werden im Augenblicke der grössten Zusammendrückung die beiden Körper eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit  $u$  annehmen, welche so gross ist wie die Geschwindigkeit, welche der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Ganzen vor dem Stosse bereits hatte. Diese Geschwindigkeit kann nach der Lehre vom Schwerpunkte berechnet werden aus der Gleichung:

$$(660) \quad (m_1 + m_2)u = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

welche in Bezug auf den vorliegenden Fall ausdrückt, dass die Bewegungsgrösse unverändert geblieben ist. Indem man die im Augenblicke der grössten Zusammendrückung vorhandene lebendige Kraft subtrahirt von der vor dem Stosse vorhanden gewesen lebendigen Kraft, erhält man für den Verlust an lebendiger Kraft den Ausdruck:

$$(661) \quad \mathfrak{B} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2},$$

1) Im übrigen muss der Verfasser dieser „Untersuchungen“ sich hier in gewissem Sinne als mitschuldig bekennen, insofern er die von Schiaparelli aufgestellte Theorie in beide Auflagen seines Lehrbuchs aufgenommen hat, was natürlich bei rechtzeitiger Entdeckung des Fehlers unterblieben wäre. (Vgl. des Verfassers „Lehrbuch der Ingenieurmechanik“, erste Aufl. § 167, zweite Aufl. § 199. Die in der ersten Auflage enthaltene Angabe des Ursprungs ist bei der zweiten Auflage infolge eines Versehens weggeblieben).

welcher nach Substitution des aus der vorigen Gleichung für  $u$  zu entnehmenden Werthes die folgende Form annimmt:

$$(662) \quad \mathfrak{B} = \frac{m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2}{2 (m_1 + m_2)}.$$

Wenn die Umstände so beschaffen sind, dass der Fall des vollkommen unelastischen Stosses vorauszusetzen ist, so werden beide Körper mit der unverändert bleibenden gemeinschaftlichen Geschwindigkeit  $u$  nach dem Stosse sich weiter bewegen, und der oben berechnete Verlust an lebendiger Kraft ist in diesem Falle ein bleibender Verlust.

Für den Fall, dass die gestossene Masse vor dem Stosse im Ruhezustande sich befand, ist  $u_2 = 0$  zu setzen, und man erhält für diesen Fall die Gleichungen:

$$(663) \quad u = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2},$$

$$(664) \quad \mathfrak{B} = \frac{m_1 u_1^2}{2} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

Wenn man annimmt: dass nach Vereinigung der beiden Körper zu dem Massencomplexe  $m_1 + m_2$  ein neuer Stoss gegen die vorher ruhende Masse  $m_3$  erfolgt, hierauf ein Stoss des Massencomplexes  $m_1 + m_2 + m_3$  gegen die vorher ruhende Masse  $m_4$  u. s. w., so können für jeden dieser Stösse die Aenderungen der Geschwindigkeit und der lebendigen Kraft auf dieselbe Weise wie oben berechnet werden. Denkt man sich die Massengrössen der gestossenen (vor dem Stosse ruhenden) Körper und ihre Abstände voneinander unendlich klein — wie z. B. bei dem in Fig. 1 dargestellten Falle, bei welchem die ge-



Fig. 1.

stossenen Körper als unendlich nahe bei einander befindliche, unendlich dünne Scheiben gedacht sind, deren Ebenen rechtwinkelig zur Stossrichtung stehen —, so ergeben sich für den Zeitpunkt, in welchem der stossende Massencomplex die Grösse



$M + m$ , und die Geschwindigkeit desselben die Grösse  $u$  erreicht hatte, auf dieselbe Weise wie oben die Gleichungen:

$$(665) \quad (M + m + dm)(u + du) = (M + m)u,$$

$$(666) \quad d\mathfrak{B} = \frac{(M + m) dm u^2}{2(M + m + dm)}.$$

Die vorletzte Gleichung drückt wiederum das Constantbleiben der Bewegungsgrösse aus; wenn also anfangs  $m = 0$  und  $u = u_0$  war, so ist:

$$(667) \quad (M + m)u = Mu_0.$$

Der Gleichung (666) kann man, da im Nenner die unendlich kleine Grösse  $dm$  neben der endlichen Grösse  $M + m$  verschwindet, auch die einfachere Form geben:

$$(668) \quad d\mathfrak{B} = \frac{u^2}{2} dm = \frac{u^2}{2g} d(mg).$$

Indem man ferner:  $Mg = Q$ ,  $mg = q$  und  $u^2/2g = z$  setzt, gelangt man schliesslich zu den folgenden Gleichungen:

$$(669) \quad (Q + q)u = Qu_0,$$

$$(670) \quad d\mathfrak{B} = z dq.$$

Der in Meterkilogrammen ausgedrückten verlorenen lebendigen Kraft  $d\mathfrak{B}$  entspricht das Wärmeäquivalent  $A d\mathfrak{B}$ . Wenn also angenommen werden darf, dass die als solche verschwindende lebendige Kraft in Wärme sich verwandelt, und dass diese Wärme ausschliesslich auf die gestossene Masse sich überträgt, so ergibt sich für die derselben pro Massenkilogramm zugeführte Wärme der Werth:

$$(671) \quad w = A \frac{d\mathfrak{B}}{dq} = Az.$$

Indem man diese Wärmequantität durch die spezifische Wärme  $c$  dividirt, erhält man für die hervorgebrachte Temperaturerhöhung den Werth:

$$(672) \quad \theta = \frac{Az}{c}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass bei ursprünglich überall gleicher Temperatur die einzelnen Scheiben mit ungleichen Temperaturen an den stossenden Massencylinder sich anschliessen, und zwar erleidet die erste Scheibe die grösste Temperaturerhöhung:

$$(673) \quad \theta_0 = \frac{Az_0}{c}.$$



Im Inneren der Masse  $m$  wird daher die Temperatur in der Richtung nach der Vorderfläche hin allmählich abnehmen.

Den Stossdruck  $W$  kann man aus Gleichung (667) berechnen, indem man dieselbe nach der Zeit  $t$  differenziert; man erhält dann die Gleichung:

$$(674) \quad (M + m) \frac{du}{dt} + u \frac{dm}{dt} = 0,$$

in welcher das erste Glied, als Product aus Masse und Beschleunigung, seinem absoluten Werthe nach, den Stossdruck oder den der Bewegung entgegenwirkenden Widerstand darstellt. Dieser Widerstand hat also die Grösse:

$$(675) \quad W = u \cdot \frac{dm}{dt} = \frac{u}{g} \cdot \frac{dq}{dt}.$$

Während der stossende Massencylinder mit der Geschwindigkeit  $u$  vorrückt, findet ein beständiges Wachsen seiner Länge statt, insofern die vorher ruhenden scheibenförmigen Massenelemente, eines nach dem anderen, sich an denselben anschliessen und mit demselben zu einer compacten Masse vereinigen. Wenn mit  $u$  die Geschwindigkeit des Wachsens jener Verlängerung bezeichnet wird, so ist  $u + u$  die Geschwindigkeit, mit welcher der jeweilige Ort des Stosses fortschreitet. Die während der Zeit  $dt$  zu dem stossenden Massencylinder neu hinzukommende Masse  $dm$  wird also aus allen denjenigen Scheiben sich zusammensetzen, welche vorher zwischen den beiden Endpunkten der Strecke  $(u + u) dt$  lagen. Wenn also mit  $F$  die Scheibenfläche bezeichnet wird — oder die Querschnittsfläche des die ruhenden Scheiben enthaltenden cylindrischen Raumes — mit  $\gamma$  das Gewicht der Masse, welche in jedem Cubikmeter dieses Raumes enthalten sein würde, wenn die Massensumme der (in Wirklichkeit durch leere Zwischenräume getrennten) Scheiben gleichförmig in demselben vertheilt wäre, und mit  $\gamma'$  der Werth, bis zu welchem die Grösse  $\gamma$  zunimmt bei der Vereinigung der Scheiben zu einer compacten Masse: so kann unter der Voraussetzung, dass jede Scheibe bei dem Stosse nur um einen verschwindend kleinen Bruchtheil ihrer Dicke zusammengedrückt wird, das Gewicht der Masse  $dm$  berechnet werden aus der Gleichung:

$$(676) \quad d(mg) = dq = \gamma F(u + u) dt = \gamma' F u dt.$$

Für das Verhältniss der beiden Dichtigkeiten erhält man hieraus den Ausdruck:

$$(677) \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{u}{u + u'},$$

und mit Benutzung desselben kann man den vorhergehenden Gleichungen auch die folgenden Formen geben:

$$(678) \quad dq = \frac{\gamma F u dt}{1 - \varepsilon},$$

$$(679) \quad W = \frac{\gamma F u^2}{(1 - \varepsilon) g} = \frac{2 \gamma F z}{1 - \varepsilon}.$$

Diese letztere Gleichung zeigt, dass der pro Flächeneinheit wirkende Stossdruck nicht nur von den Grössen  $u$  und  $\gamma$ , sondern auch von der Grösse  $\varepsilon$  abhängt, und dass derselbe unter sonst gleichen Umständen — d. h. bei gleichen Werthen von  $u$  und gleichen Werthen von  $\gamma$  — für Platten von geringerem specifischen Gewichte einen grösseren Werth annehmen würde als für Platten von grösserem specifischen Gewichte (z. B. für Wachsplatten einen grösseren Werth als für Bleiplatten).

Der Ableitung obiger Gleichungen wurde die Voraussetzung zu Grunde gelegt, dass die bei dem Stosse eintretende Dichtkeitszunahme lediglich durch das Verschwinden der leeren Zwischenräume bedingt wurde, dass dagegen die Scheiben selbst nur unendlich kleine Zusammendrückungen erlitten. Dieser Voraussetzung entsprechend ist der obige Ausdruck für  $W$  zu deuten als Ausdruck für den Mittelwerth des Stossdruckes, dessen wirklicher Werth zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$  beständig hin und her springt, während die Stossfläche von einer Scheibe zur anderen fortwandert.

Offenbar behalten aber die obigen Gleichungen auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn statt dessen angenommen wird, dass entweder gar keine oder im Verhältniss zur Scheibendicke unendlich kleine Zwischenräume vorhanden waren, und dass die Scheiben selbst aus zusammendrückbarer Substanz bestanden. In diesem Falle würde die Aenderung des Stossdruckes als eine continuirliche angesehen werden dürfen, und der für die Verhältnisszahl  $\varepsilon$  gefundene Ausdruck würde das Compressionsverhältniss der Scheibenmasse darstellen, nämlich das Verhältniss der durch den Stossdruck verringerten Dicke zur ursprünglichen Dicke derselben.

Bei Ableitung der obigen Gleichungen wurde ferner vorausgesetzt: dass die Scheiben wie vollkommen unelastische Körper sich verhalten. Der Unterschied zwischen vollkommen unelastischen und vollkommen elastischen Körpern besteht aber darin: dass bei ersteren die Zusammendrückung stets eine bleibende ist, während bei letzteren nach erfolgter Zusammendrückung stets eine Wiederausdehnung stattfindet, sobald der Druck abnimmt. Der Unterschied zwischen den beiden Körperarten hinsichtlich ihres Verhaltens beim Stosse wird demnach erst im Momente der stärksten Zusammendrückung beginnen, sich bemerklich zu machen. Wenn also entweder die Wiederausdehnung auf irgend eine Weise vollständig verhindert würde, oder wenn die Untersuchung des ganzen Vorganges beschränkt bliebe auf denjenigen Zeitraum, in welchem die Wiederausdehnung noch nicht begonnen hatte, so würden die obigen Gleichungen auch für vollkommen elastische Körper als gültig zu betrachten sein.

Unter dieser einschränkenden Bedingung würde es zulässig sein, die obigen Gleichungen z. B. auf den in Fig. 2 dargestellten Fall eines mit planetarischer Geschwindigkeit in einem



Fig. 2.

mit ruhender Luft gefüllten (inwendig vollkommen glatt vorausgesetzten) Rohre sich bewegenden, festen, cylindrischen Körpers anzuwenden, welcher eine comprimirt Luftsäule von stets wachsender Masse vor sich herschiebt, während die weiter vorn befindliche, noch nicht vom Stossdrucke erreichte Luft in ihrem ursprünglichen Zustande einstweilen verharret, insofern die Geschwindigkeit  $u$  beträchtlich grösser als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stosswelle vorausgesetzt wird.

Der Einfachheit halber soll zunächst vorausgesetzt werden, dass die Dichtigkeit der vor dem Stosse ruhenden Luftsäule überall gleich gross war, und dass die Bewegung des stossenden Körpers durch eine in der Richtung seiner Bewegung

wirkende Kraft von der Grösse  $K = W$  gleichförmig erhalten wird. In diesem Falle bleibt der (nach Gleichung (679) dem Producte  $\gamma u^2$  proportionale) Stossdruck  $W$  während der Bewegung constant, und da die einzelnen vom Stosse getroffenen Luftschichten der Reihe nach sämmtlich unter gleichem Drucke an die bewegte Säule sich anschliessen, so wird eine Wiederausdehnung der comprimierten Schichten in diesem Falle vollständig verhindert.

Die oben mit  $\varepsilon$  bezeichnete Grösse würde hiernach als Compressionsverhältniss der vom Stossdrucke getroffenen Luftschicht zu deuten und auf folgende Weise zu berechnen sein. Für den Stossdruck pro Flächeneinheit ergibt sich aus Gleichung (679) der Werth:

$$(680) \quad p' = \frac{W}{F} = \frac{2\gamma z}{1 - \varepsilon},$$

und wenn mit  $T'$  die absolute Temperatur bezeichnet wird, welche diese Luftschicht während der Compression erreicht, so liefert die Mariotte-Gay-Lussac'sche Gleichung für  $p'$  den Werth:

$$(681) \quad p' = \gamma' R T'.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man alsdann mit Benutzung des in Gl. (677) für  $\varepsilon$  angegebenen Werthes die Gleichung:

$$(682) \quad \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{RT'}{2z}.$$

Wenn die ursprüngliche Temperatur  $T$  als verschwindend klein im Verhältniss zur eintretenden Temperaturerhöhung  $\Theta = T' - T$  vorausgesetzt wird, so kann  $T' = \Theta$  gesetzt werden, und mit Benutzung des in Gl. (672) für  $\Theta$  gefundenen Ausdruckes (in welchem nunmehr die Grösse  $c_v = 0,1685$ , als specifische Wärme der Luft bei constantem Volumen, an die Stelle von  $c$  zu setzen ist) gelangt man zu der Gleichung:

$$(683) \quad \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{AR}{2c_v},$$

in welcher nach dem bekannten, hier schon mehrfach angewendeten Satze der mechanischen Wärmetheorie:

$$(684) \quad AR = c_p - c_v = c_v (k - 1)$$

gesetzt werden kann, worauf man für das Compressionsverhältniss  $\varepsilon$  die folgende Gleichung erhält:

$$(685) \quad \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{k-1}{2}, \quad \text{oder:} \quad \varepsilon = \frac{k-1}{k+1}.$$

Der in dieser Gleichung enthaltene Satz bildet das Analogon zu einem im Jahrg. 1877 dieser Annalen unter dem Titel: „Paradoxon der mechanischen Wärmetheorie“, veröffentlichten Satze, nach welchem  $(k-1)/k$  der Grenzwert ist, welchem das den Gleichgewichtsbedingungen entsprechende, bei plötzlicher Drucksteigerung eintretende Compressionsverhältniss sich nähert, wenn diese plötzliche Drucksteigerung unendlich gross wird.

Mit Benutzung des abgerundeten Zahlenwerthes  $k = 1,4$  findet man aus obiger Gleichung die von der Geschwindigkeit  $u$  und von der Dichtigkeit  $\gamma$  ganz unabhängige Verhältnisszahl:

$$(686) \quad \varepsilon = \frac{0,4}{2,4} = \frac{1}{6}.$$

Als Resultat dieser letzteren Untersuchung ergibt sich aus den beiden Gleichungen (686) und (671) der folgende Satz:

*Jedes vom Stossdrucke erreichte Lufttheilchen wird auf ein Sechstel des ursprünglichen Volumens comprimirt, und die bei dieser Compression erzeugte Wärme bildet das Aequivalent derjenigen mechanischen Arbeit, welche das Gewicht des Theilchens beim Herabsinken von der Geschwindigkeitshöhe verrichten würde.*

Dem ersteren Theile dieses Satzes ist natürlich nur eine hypothetische Bedeutung beizulegen, da nicht bekannt ist, ob und wie die Verhältnisszahl  $k$  bei höheren Temperaturen sich ändert. Der letztere Theil dagegen darf als ein unmittelbar aus dem Grundprincipe der mechanischen Wärmetheorie abgeleiteter Satz zur ersteren von den beiden im Eingange des vorigen Paragraphen erwähnten Classen von Thesen gerechnet werden.

Der Stossdruck  $W = p' F$  verrichtet während der Zeit  $dt$  die Arbeit  $p' F u dt$ , und diese Arbeit vertheilt sich auf  $dg$  Massenkilogramme. Nach den Gleichungen (676), (677), (680) hat also die pro Massenkilogramm der gestossenen Luftschicht verrichtete Arbeit die Grösse:

$$(687) \quad \mathfrak{A} = \frac{p' F u dt}{\gamma F(u + u) dt} = \frac{p'(1-\varepsilon)}{\gamma} = 2z.$$

Von dieser Arbeit wird die eine Hälfte in lebendige Kraft umgewandelt (nämlich in die der augenblicklichen Geschwindigkeit  $u$  entsprechende lebendige Kraft:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{u^2}{2} = z,$$

während die andere Hälfte in die Compressionswärme  $w = Az$  umgewandelt wird.

Diese in Wirklichkeit erzeugte Compressionswärme ist beträchtlich grösser als diejenige, welche bei adiabatischer Compression erzeugt worden wäre. Wenn mit  $T''$  diejenige Temperatur bezeichnet wird, welche bei adiabatischer Compression eintreten würde, so ist nach dem Poisson'schen Gesetze:

$$(688) \quad \left( \frac{T''}{T} = \left( \frac{p'}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \gamma^{\frac{p'}{RT}} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

zu setzen, und mit Benutzung des aus Gl. (680) für  $p'$  zu entnehmenden Ausdruckes erhält man hieraus für  $T''$  den Werth:

$$(689) \quad T'' = T^{\left( \frac{1}{k} \right)} \left[ \frac{2z}{(1-\epsilon)R} \right]^{\frac{k-1}{k}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die bei adiabatischer Compression eintretende Temperaturerhöhung um so kleiner sein würde, je kleiner die ursprüngliche Temperatur  $T$  war, und dass dieselbe gleich Null werden würde, wenn  $T$  selbst gleich Null war.

[Denkt man sich, unter Beibehaltung der Voraussetzung einer stets gleichförmigen Bewegung der Masse  $M$  und einer unbeschränkten Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes, das Vorderende des Rohres durch eine feste Bodenwand abgeschlossen, so führt die weitere Verfolgung der obigen Untersuchung zu dem Ergebniss, dass in dem Augenblicke, wo das Vorderende der auf die sechsfache Dichtigkeit comprimierten Luftsäule gegen den Boden stösst, an dieser Stelle die Bildung einer auf die zwanzigfache Dichtigkeit comprimierten ruhenden Luftsäule beginnt, welche allmählich nach rückwärts sich verlängert, bis dieselbe von dem Stosse der Masse  $M$  getroffen wird, worauf am Vorderende der letzteren die Bildung einer auf die 53fache Dichtigkeit comprimierten bewegten Luftsäule beginnt, und der Vorgang in solcher Weise sich fortsetzt, dass in der ursprünglich ruhenden Luftsäule abwechselnd an dem einen und an dem anderen Ende stets aufs neue eine allmählich nach dem anderen Ende hin fortschreitende Vervielfachung der Dichtigkeit eintritt, bis schliesslich beim Stosse

der Masse  $M$  gegen den festen Boden die Dichtigkeit unendlich gross wird.]

Wenn in Bezug auf den in Fig. 2 dargestellten Fall nunmehr angenommen wird, dass in einem bestimmten Zeitpunkte die Kraft  $K$ , durch welche bis dahin die Bewegung der Masse  $M$  gleichförmig erhalten wurde, plötzlich aufhört zu wirken, so ergibt sich, dass in demselben Augenblicke eine Verzögerung ihrer Bewegung eintreten wird, weil der am Vorderende wirkende Druck nun nicht mehr aufgehoben wird. Zugleich beginnt in dem angrenzenden Theile der comprimierten Luftsäule eine Ausdehnung, welche nach Art der Schallwellen (mit einer der nunmehr erhöhten Temperatur entsprechenden Geschwindigkeit) längs der Säule sich fortpflanzen und schliesslich das Vorderende erreichen wird, dessen Geschwindigkeit dann ebenfalls beginnt abzunehmen. Aber diese letztere Geschwindigkeitsabnahme wird kleiner sein als die der Masse  $M$ , weil inzwischen die Länge der comprimierten Luftsäule infolge der Druckabnahme zu wachsen begonnen hat und fortfährt zu wachsen. Während bei dem vorigen Falle die Masse  $M$  und das Vorderende der Masse  $m$  mit gleichen Geschwindigkeiten, nämlich mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit  $u$ , sich bewegten, werden nunmehr die beiden Geschwindigkeiten von einander verschieden sein. Die Grösse  $u$  verliert daher ihre bisherige Bedeutung, wobei selbstverständlich auch die Gl. (667) ihre Gültigkeit verliert.

Wenn aber nunmehr die Grösse  $u$  aufgefasst wird als diejenige Geschwindigkeit, mit welcher in einem bestimmten Zeitpunkte das Vorderende der comprimierten Luftsäule sich bewegt, so behalten diejenigen Gleichungen, welche auf den an der Stossfläche selbst stattfindenden Vorgang sich beziehen, nach wie vor ihre Gültigkeit. Jede vom Stossdrucke getroffene Luftsicht wird zunächst auf die sechsfache Dichtigkeit comprimirt und empfängt dabei die der augenblicklichen Geschwindigkeit  $u$  entsprechende Compressionswärme, wobei später eintretende Aenderungen dieser Grössen nicht ausgeschlossen sind.

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, dass bei der dem Buchstaben  $u$  nunmehr beigelegten Bedeutung auch eine Aenderung der bis dahin constant vorausgesetzten Grösse  $\gamma$  die Gültigkeit jener Gleichungen nicht beeinträchtigen würde. Ein



allmähliches Abnehmen von  $\gamma$  würde auf eine nachträglich eintretende Verlängerung, ein allmähliches Wachsen von  $\gamma$  auf eine nachträgliche Verkürzung der comprimierten Luftsäule hinwirken. Aber die unmittelbar durch den Stoss selbst hervorbrachte Zustandsänderung der getroffenen Luftschicht (welche während der Zusammendrückung wie ein unelastischer Körper sich verhält) wird für einen gegebenen Werth der Geschwindigkeit  $u$  auf dieselbe Weise wie bei dem vorigen Falle berechnet werden dürfen. Das Compressionsverhältniss  $\epsilon$  und die Temperaturerhöhung  $\Theta$  sind beide ganz unabhängig von der ursprünglichen Dichtigkeit der vom Stossdrucke erreichten Luftschicht, und die beim Stosse eintretende Temperaturerhöhung derselben hängt ausschliesslich von der Grösse der augenblicklichen Geschwindigkeit  $u$  ab.

Es bleibt noch übrig zu untersuchen, welche Abweichungen von dem oben betrachteten Vorgange das Fehlen der Rohrwand bedingen würde, und wie weit die oben gefundenen Resultate für einen in der freien Atmosphäre sich bewegenden (cylindrischen oder prismatischen) Meteoriten als gültig betrachtet werden dürfen. Die Abweichung von dem zuletzt untersuchten Falle, bei welchem die vor dem stossenden Körper befindliche comprimirt Luft eine an Masse stetig zunehmende, von ebener Vorderfläche begrenzte, cylindrische Säule bildete, welche nur in ihrer Längenrichtung später sich wieder ausdehnen konnte, wird zunächst darin bestehen, dass nunmehr auch rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung die comprimirt Luft nach allen Seiten hin sich ausdehnen und entweichen kann. Infolge dessen wird die in einem gestossenen Lufttheilchen durch den Stossdruck erzeugte Compressionswärme unmittelbar nach dem Stosse beginnen wieder abzunehmen. Auch wird die eigentliche Stossfläche — nämlich die jeweilige Grenzfläche zwischen bewegter und ruhender Luft — nun nicht mehr eine rechtwinkelig zur Stossrichtung stehende Ebene bilden, sondern vielmehr die Form einer Rotationsfläche annehmen, und infolgedessen wird die Bedingung des geraden Stosses nur noch im centralen Theile des Stosscanals erfüllt sein.

Da jedoch die umgebende ruhende Luft vermöge ihrer Trägheit dem seitlichen Entweichen der comprimierten Luft



einen gewissen Widerstand entgegensetzt, und da das seitliche Entweichen selbst eine Wirkung ist, zu deren Hervorbringung die durch den Stossdruck erzeugte Compression, als vorausgehende Ursache einer gewissen Zeit bedarf; da ferner an die Stelle des nach der Compression entweichenden Lufttheilchens sofort ein anderes tritt, welches dieselbe Compression erleidet, so darf man annehmen, dass der einem bestimmten Werthe der Geschwindigkeit  $u$  entsprechende Zustand gesteigerten Druckes und erhöhter Temperatur an der Vorderfläche der comprimierten Luftmasse — soweit es sich um den centralen Theil derselben handelt — stets übereinstimmen wird mit dem Zustande, in welchem bei dem vorigen Falle die vorderste Schicht der comprimierten Luftsäule sich befand, dass also — wenn auch nicht in der ganzen vom Stosse getroffenen Luftmasse, so doch — im centralen Theile derselben stets die der Geschwindigkeitshöhe  $z = u^2/2g$  entsprechende Temperaturerhöhung hervorgebracht wird (wobei die Grösse  $u$  nun wieder als die Geschwindigkeit des stossenden Körpers selbst gedeutet werden kann, da der beim vorigen Falle zu berücksichtigende Unterschied zwischen der Geschwindigkeit des stossenden Körpers und der Geschwindigkeit des Vorderendes der comprimierten Luftsäule hier wegfällt).

Beim Eintreten in die Atmosphäre bildet jedenfalls die Vorderfläche des Meteoriten selbst die Stossfläche. Für diesen Zeitpunkt würde daher jene einschränkende Bedingung, durch welche das Gültigkeitsgebiet der gefundenen Gleichungen auf den centralen Theil des Stosscanales beschränkt wurde, in Wegfall kommen. Soweit es sich also nur um die beim ersten Einschlagen des (prismatisch vorausgesetzten) Meteoriten auftretenden Erscheinungen handelt, darf man die Zustandsänderung der durch den Stossdruck comprimierten Luftmasse ohne Bedenken unmittelbar nach den für die Bewegung im Rohre gefundenen Gleichungen berechnen, wobei man stets im Auge zu behalten hat, dass bei etwaiger (von der prismatischen) abweichenden Form des Meteoriten die oben erwähnte einschränkende Bedingung im allgemeinen wieder in Kraft treten wird.

Der bei dem ersten von Schiaparelli berechneten Zahlenbeispiele angenommenen Eintrittsgeschwindigkeit  $u_0 = 72000$  m entspricht die Geschwindigkeitshöhe  $z_0 = 264\,500\,000$  m, und nach Gl. (671) die Compressionswärme  $w_0 = 623\,820$  Wärmeeinheiten. Unter Voraussetzung eines constanten Werthes der specifischen Wärme  $c = c_v = 0,1685$  erhält man hiernach aus Gleichung (672) für die Temperaturerhöhung den Werth:  $\Theta = 3\,702\,000$  Grad.

Bei Annahme einer adiabatischen Zustandsänderung würde man unter Beibehaltung des von Schiaparelli für die Anfangstemperatur willkürlich angenommenen Werthes  $T = 123^\circ$ , nach Gl. (689) den Werth  $T'' = 4120^\circ$  erhalten — also einen Werth, welcher nicht viel mehr als den tausendsten Theil von dem richtigen Werthe beträgt. — Dass Schiaparelli selbst den grösseren Werth  $T'' = 42776^\circ$  findet, erklärt sich dadurch, dass derselbe bei seiner Berechnung statt der theoretischen, für den Stossdruck oben gefundenen Gleichung eine empirische Formel benutzt hat, nämlich die von St. Robert aufgestellte Widerstandsformel, nach welcher bei sehr grossen Geschwindigkeiten der Widerstand nahezu der vierten Potenz der Geschwindigkeit proportional sich ändern würde.

Der oben für die Eintrittsgeschwindigkeit angenommene Werth würde der Voraussetzung einer parabolischen Bahnlinie des Meteoriten entsprechen und der gleichzeitigen Annahme, dass im Augenblicke des Eintrittes die Bewegungsrichtung der Erde derjenigen des Meteoriten entgegengesetzt war. Denn die absolute Geschwindigkeit des Meteoriten beim Durchgange durch die Erdbahn würde nach dieser Voraussetzung etwa 42000 m betragen, und da die Erde mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 30000 m sich bewegt, so ergibt sich hieraus eine relative Geschwindigkeit von 72000 m.

Für den Eintritt in die Sonnenatmosphäre würde aus der Voraussetzung einer parabolischen Bahnlinie eine Geschwindigkeit von 82 Meilen, also der Werth  $u_0 = 608\,440$  m sich ergeben. Diesem Werthe entspricht die Geschwindigkeitshöhe:  $z_0 = 18888$  Millionen Meter und die Compressionswärme  $w_0 = 44,55$  Millionen Wärmeeinheiten. Wenn also die Sonnenatmosphäre aus denselben Gasen bestände wie die Erdatmosphäre, so würde für die Temperaturerhöhung der Werth

$\Theta_0 = 264,4$  Millionen Grad sich ergeben. Unter Voraussetzung einer Wasserstoffatmosphäre dagegen würde man den Werth  $\Theta_0 = 18,43$  Millionen Grad erhalten.

Bei Annahme von hyperbolischen Bahnlinien, deren Vorkommen, wenn auch noch nicht mit hinreichender Sicherheit constatirt, doch in hohem Grade wahrscheinlich ist, würde man zu noch grösseren Zahlenwerthen gelangen. Im übrigen hat man stets im Auge zu behalten, dass nur die für die Compressionswärme  $w_0$  gefundenen Werthe, welche unmittelbar aus dem Grundprincipe der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet wurden, als zuverlässig gelten können, dass dagegen die aus der Voraussetzung eines auch bei höheren Temperaturen constant bleibenden Werthes der specifischen Wärme  $c_v$  abgeleiteten Temperaturwerthe selbstverständlich nur als hypothetische Annäherungswerthe gelten können. Immerhin darf man jedoch die hier gefundenen numerischen Werthe als Bestätigung betrachten für die im vorigen Paragraphen aufgestellte Behauptung, dass die bei Meteoritenfällen vorkommenden Temperaturen die höchsten, directer Wahrnehmung zugänglichen Temperaturen sind, welche überhaupt im Universum vorkommen.

### XVII. *Ueber das galvanische Leitungsvermögen des festen Quecksilbers;* *von Carl Ludwig Weber.*

Unter dem Titel: „Untersuchungen über die Aenderungen des galvanischen Leitungswiderstandes verschiedener Körper bei Aenderung ihres Aggregatzustandes“ hat kürzlich Hr. L. Grunmach Messungen über das Leitungsvermögen des festen Quecksilbers veröffentlicht<sup>1)</sup>, welche im Jahre 1885 angestellt sind, und deren Resultate im Widerspruch stehen mit den von Hrn. Cailletet und Bouty und von mir in jenem Jahre bekannt gemachten Zahlen.<sup>2)</sup>

1) L. Grunmach, Wied. Ann. **35.** p. 764. 1888.

2) Cailletet u. Bouty, Compt. rend. **100.** p. 1188. 1885. C. L. Weber, Wied. Ann. **25.** p. 245. 1888. Die Resultate der Herren Cailletet u. Bouty wurden am 11. Mai 1888 der Pariser Academie vorge-

Hr. Grunmach findet nämlich: 1. dass der Widerstand des geschmolzenen Quecksilbers nach dem Schmelzen nicht (wie von mir angegeben) viermal so gross ist, als der des festen, unmittelbar vor dem Beginn des Schmelzens, sondern nur etwa 1,5 mal so gross.

2. dass der Temperaturcoëfficient des erstarrten Quecksilbers nicht circa 0,4 Proc. beträgt, wie bei den übrigen festen, reinen Metallen, sondern er gibt dafür Werthe zwischen 0,002 und 0,0004.

3. dass dieser Temperaturcoëfficient nicht constant ist, sondern innerhalb der Grenzen von  $-40^{\circ}$  bis  $-90^{\circ}$  mit abnehmender Temperatur beständig abnimmt, sodass also das Quecksilber auch im festen Zustande entschiedene Ausnahme bildet gegenüber den anderen reinen Metallen.

Es sei mir gestattet, hierzu Folgendes zu bemerken. Wie in meiner Arbeit erwähnt, sind meine Messungen mit ganz einfachen Hilfsmitteln und infolge dessen innerhalb enger Temperaturgrenzen ausgeführt, und ich zweifle nicht, dass eine erneute Untersuchung desselben Gegenstandes gewisse Correcturen meiner Zahlen zu Tage fördern wird; aber niemals werden dieselben jene grossen Beträge erreichen, wie sie Hr. Grunmach findet. In der That sind meine Angaben durch Cailletet und Bouty, die mit viel vollkommeneren Mitteln arbeiteten, vollkommen bestätigt worden.

Was zunächst die grosse Widerstandsänderung beim Erstarren betrifft, deren Betrag bei Grunmach kleiner ist als bei mir, so ist doch anzunehmen, dass wir beide den Widerstand des flüssigen Quecksilbers in den Glasröhren, etwa in der Nähe von Null Grad ziemlich richtig gemessen haben; es müssen also beim Erstarren des Quecksilbers plötzlich Ursachen auftreten, welche entweder bei mir den Widerstand des festen Metalles kleiner erscheinen lassen, als er in Wirklichkeit ist, oder die andererseits bei Grunmach eine Vermehrung des Widerstandes herbeiführen. Nun ist aber gar kein Grund denkbar, der den Widerstand hätte verkleinern

---

legt; das Manuscript über meine Arbeit war bereits Mitte April an die Redaction dieser Annalen übersandt worden.

können, aber umgekehrt ist es möglich, dass der Widerstand zu gross gefunden wird infolge der Risse, die bekanntlich sehr leicht in dem erstarrenden Quecksilber entstehen, und die um so grösser werden, je mehr sich das feste Metall unter dem Einfluss der sinkenden Temperatur zusammenzieht, da es durch die umschliessende Glasröhre gehindert ist, diesem Zuge frei zu folgen; es erfordert besondere Uebung, diese Sprünge zu vermeiden, und sie treten ohne Zweifel in den vielfach gewundenen Siemens'schen Normalröhren viel leichter auf und sind da viel schwerer zu entdecken, als in einer einfachen, möglichst gleichmässig gekrümmten U-Röhre. Mit der letzteren erhielt ich aus allen Beobachtungen, die nicht wegen beobachteter Rissen ganz verworfen wurden, grössere Werthe für die Widerstandsänderung als 1,5; so finden sich z. B. aus meinen Vorversuchen, bei denen theilweise gar keine oder mangelhafte Temperaturbestimmungen gemacht sind, für diese Aenderung die Werthe:

3,2, 4,2, 3,9, 4,0, 3,5, 4,0.

Also auch die kleinste dieser Zahlen ist doppelt so gross als 1,5. Endlich stimmen in diesem Punkte meine Angaben vollständig überein mit den Messungen von Cailletet und Bouty. Aus meinen Zahlen  $s_0 = 0,2826$  und  $\alpha = 0,00433$  berechnet sich für den Schmelzpunkt des Quecksilbers ( $-39^\circ$ ) der specifische Widerstand des festen Metalls zu  $s = 0,23488$ ; der des flüssigen aus  $s'' = 1,00$  und  $\alpha' = 0,00901$  zu  $s' = 0,96486$ ; das Verhältniss  $s'/s$  demnach zu 4,108; Cailletet und Bouty finden 4,08.

In Betreff des Temperaturcoefficienten kann ich zunächst der Art und Weise nicht zustimmen, wie derselbe von Hrn. Grunmach berechnet wird; derselbe kann nach meiner Ansicht nur aus den am festen Quecksilber beobachteten Widerständen berechnet werden; unter keinen Umständen ist es gestattet, zur Berechnung dieser Zahl irgend eine am flüssigen Quecksilber beobachtete Grösse herbeizuziehen. Wenn man überhaupt einen einzigen Temperaturcoefficienten  $\alpha$  annimmt, so ist damit die Voraussetzung gemacht, dass der Widerstand innerhalb gewisser Grenzen eine lineare Function der Temperatur sei. Bei einem Material,

dessen Widerstandcurve, wie beim Quecksilber, aus zwei durch einen Sprung getrennten Zweig besteht, gilt diese Voraussetzung natürlich für jeden einzelnen Zweig.

Diese beiden nahe geradlinigen Stücke haben ganz verschiedene Neigungen gegen die Abscissenaxe, und die diese Neigung charakterisirende Grösse  $\alpha$  muss natürlich für jeden Theil besonders berechnet werden; gerade wie wenn es sich um zwei verschiedene Stoffe handeln würde. Die von mir benutzte Formel:  $\alpha = (W-w)/(wT-Wt)$  führt einfach zu diesem Ziel; während die Berechnungsweise des Hrn. Grunmach  $\alpha = (W-w)/(W_0(T-t))$ ; wo  $W_0$  der bei  $0^\circ$  beobachtete Widerstand, dem flüssigen,  $W$  und  $w$  aber dem festen Metall angehören, etwas ganz anderes gibt, als das, was man gewöhnlich als Temperaturcoefficienten definirt.

Das auffallende Resultat des Hrn. Grunmach, dass der Temperaturcoefficient nicht constant ist, sondern mit abnehmender Temperatur beständig abnimmt, wird aber durch seine abweichende Berechnungsweise noch keineswegs erklärt.

Dies Resultat steht aber auch im Widerspruch mit den von Grunmach selbst mitgetheilten Beobachtungen. Wenn man in der einen l. c. in extenso angeführten Messungsreihe die innerhalb eines Temperaturintervalls von je  $10^\circ$  beobachteten Widerstände zu Mittelwerthen vereinigt und die entsprechenden Temperaturmittel bildet, so ergibt sich folgende Reihe:

Temperatur:	84,05	73,74	65,28	53,36	45,02
Widerstand:	1,15681	1,17127	1,18228	1,19050	1,19741.

Hieraus berechnen sich nach der von mir benutzten Formel die Temperaturcoefficienten in den einzelnen Intervallen:

zwischen:	$-84^\circ$ u. $-74^\circ$	$-74^\circ$ u. $-65^\circ$	$-65^\circ$ u. $-53^\circ$	$-53^\circ$ u. $-45^\circ$
$\alpha =$	0,001 100	0,001 027	0,000 702	0,000 544,

also Zahlen, welche mit abnehmender Temperatur nicht abnehmen, sondern im Gegentheil zunehmen, sodass wenigstens diese eine Reihe dem Schlussresultat des Hrn. Grunmach nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ widerspricht.

Aus diesen Gründen kann ich mich auch mit der Schlussfolgerung des Hrn. Grunmach nicht einverstanden

erklären, sondern glaube, es sei als erwiesen zu betrachten, dass das Quecksilber, wenn es erstarrt ist, sich in seinem galvanischen Verhalten den übrigen, einfachen, reinen, festen Metallen vollkommen anschliesst.

München, December 1888.

**XVIII. Nachtrag zu meinem Aufsatz:  
„Untersuchungen über die Löslichkeit etc.“;  
von Ferdinand Braun.**

Zu der in Wied. Ann. 30. p. 250. 1887 abgedruckten Abhandlung muss ich eine Berichtigung hinzufügen, auf welche ich durch eine Zuschrift von Hrn. W. Voigt und besonders von Hrn. J. Lüroth in Freiburg aufmerksam gemacht wurde. Das specifische Volumen  $v$  der gesättigten Salzlösung ist eine Function vom Druck ( $p$ ), der Temperatur ( $t$ ) und dem procentischen Salzgehalt ( $g$ ). Letzterer ist wieder als Function von  $p$  und  $t$  anzusehen, sodass  $v$  einmal explicite Function von  $p$  und  $t$  und dann nochmals implicite Function der gleichen Variabeln ist. Dem entsprechend schrieb ich z. B.:

$$\frac{dv}{dp} = \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p}$$

mit den l. c. angegebenen Bedeutungen der Differentialquotienten. Leider habe ich bei einer späteren nochmaligen Differentiation übersehen, dieser doppelten Abhängigkeit wiederum Rechnung zu tragen. Berücksichtigt man dieselbe, so kommt in Gl. (II) rechts und links noch je ein Glied hinzu; zur linken Seite nämlich noch  $\epsilon \partial^2 v / \partial t \partial g$  und zur rechten  $\eta \partial^2 v / \partial t \partial g$ , wo die Differentiationen nach  $p$  und  $t$  nur nach den explicite vorkommenden Variabeln zu nehmen sind. — In Gl. (III) heben sich alle Glieder weg; sie fällt also vollständig aus, und damit verliert auch der p. 270 gezogene Schluss  $\lambda - \lambda' = \text{Const.}$  seine Berechtigung.

**XIX. Bemerkung zu Hrn. Langley's Aufsatz:  
„Energy and Vision“;  
von Hermann Ebert.**

In seinem Aufsätze „Energy and Vision“<sup>1)</sup> untersucht Hr. J. P. Langley die Energiemengen, welche in den verschiedenen Spectralbezirken nöthig sind, um eine bestimmte Empfindung, z. B. die Minimalempfindung wachzurufen.

Ich freue mich ganz ausserordentlich, von Hrn. Langley meine früher in genau derselben Richtung angestellten Messungen qualitativ-quantitativ aufs vollkommenste bestätigt zu sehen. Hrn. Langley waren diese Messungen, wie es scheint, entgangen. Dieselben finden sich aber bereits 10 Monate früher im ersten Hefte dieser Annalen vom Jahre 1888 p. 136 ausführlich mitgetheilt; ich habe über dieselben bereits am 14. Februar 1887 in der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen berichtet, wie aus den Mittheilungen dieser Gesellschaft zu ersehen ist. Ein kurzes Referat über meine diesbezüglichen Versuche erschien ferner in der Münchener medicinischen Wochenschrift Jahrg. 1887, p. 149. Diesen Untersuchungen dürfte hiernach die Priorität vor denen des Hrn. Langley zustehen, besonders auch die Anwendung der erhaltenen Ergebnisse auf die Versuche der Herren F. Weber und Stenger.

1) Langley, Amer. Journ. of Science. 36. p. 359. Nov. 1888.